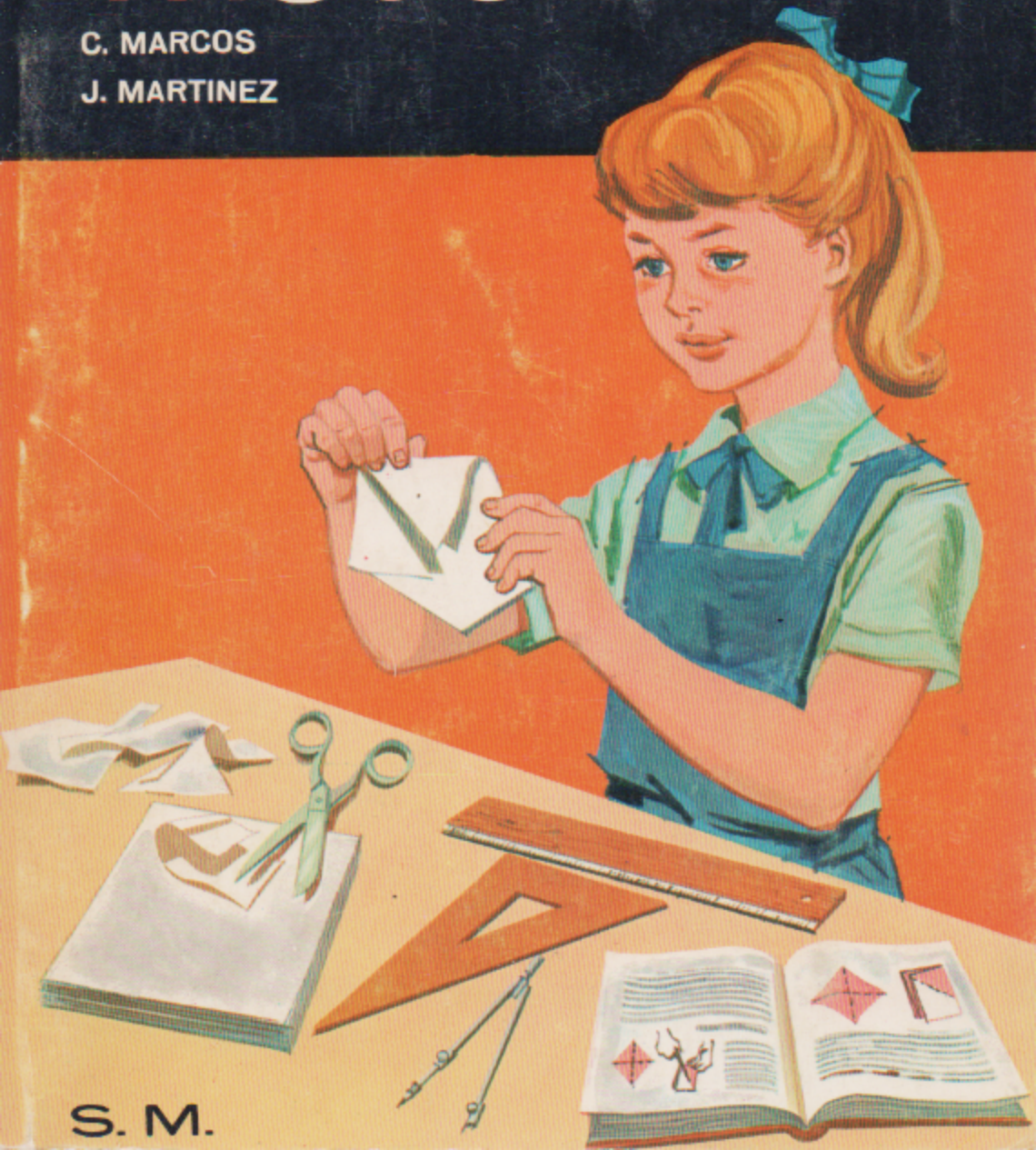
matemática moderna 1º

C. MARCOS
J. MARTINEZ



S. M.

MATEMÁTICA MODERNA

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICAS

JACINTO MARTINEZ, S. M.
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

MATEMÁTICA MODERNA

PRIMER CURSO DE BACHILLERATO

Plan 1967

Aprobado por el M. de E. y C.
Orden del 25-III-69
Boletín Oficial del 1-IV-69

EDICIONES, S. M.
Gral. Tabanera, 39 • MADRID 19

en distribución con

BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. Nieremberg, 14 - MADRID • **EDITORIAL BRUÑO** Bocángel, 15 - MADRID • **EDITORIAL L. VIVES** Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA

© Copyright by
EDICIONES S. M.
Con las debidas licencias
Derechos reservados
Depósito legal: V. 1.998 - 1969
IMPRESO EN ESPAÑA

ARTES GRÁFICAS SOLER, S. A. - JÁVEA, 30 - VALENCIA (8) - 1969

PRÓLOGO

No es revelar ningún secreto decir que estamos en un momento de renovación completa en los métodos de enseñanza de las Matemáticas. Y esto en todos los países del mundo.

En España esta renovación ha tomado carácter oficial al publicar el Ministerio de Educación y Ciencia los nuevos Cuestionarios de Bachillerato Elemental el 30 de septiembre de 1967. Este libro se inspira precisamente en dichos Cuestionarios para Primer Curso de Bachillerato.

El contenido de este libro ha sido experimentado durante varios años en más de un centenar de Colegios con resultados altamente satisfactorios. Es por lo que esperamos cosechará óptimos frutos en muchos otros Centros.

¿Y cuáles son las principales ventajas del método seguido respecto del antiguo?

En primer lugar es más CONCRETO. Durante casi los dos primeros meses del curso el alumno se dedica a estudiar los conjuntos, *en vez de comenzar, como anteriormente, por los* números, *que son entes abstractos que nuestra mente elabora, como consecuencia de la consideración de los conjuntos que diariamente manejamos. Pues bien, el niño está acostumbrado a hacer colecciones de cromos, de canicas, etc. El estudio de los conjuntos resulta para él la cosa más natural del mundo. Después de lo cual ya podemos abordar el manejo de los números con garantías de que no resulten ininteligibles para las tiernas inteligencias infantiles. De este modo seguimos el proceso natural de nuestra mente, sin saltos en el vacío, como muchas veces se hacía antiguamente, con las consecuencias de todos conocidas.*

En segundo lugar, el método que aquí propugnamos es más EXPERIMENTAL y ACTIVO. Hasta ahora los libros que poníamos en manos de los alumnos de los Primeros Cursos de Bachillerato eran ni más ni menos

que los Elementos de Euclides, un tanto modificados. Y este libro, con sus construcciones tan maravillosas para las personas mayores, resulta totalmente indigesto para los pequeños escolares. No hay que tener mucho sentido pedagógico para comprobar desde el primer instante que a los muchachos de los primeros cursos no les dice nada tanta cadena de razonamientos, teoremas, hipótesis y escolios.

La ley biogenética *nos dice que el desarrollo del individuo reproduce en pequeño el desarrollo de la especie. Existe una notable semejanza entre el desarrollo de la facultad de raciocinio en los niños y en la humanidad. Esta pasó por un primer período de acumulación de materiales obtenidos por la observación de la naturaleza, período que podríamos llamar* experimental. *Sigue otro período de* clasificación *de dichos materiales. Sólo cuando está muy adelantada la ciencia, entra en la fase deductiva y racional, en la que, sentados determinados principios o postulados, todo lo demás se deduce por silogismos.*

Aunque esta forma de exposición es evidentemente más elegante y perfecta, sería un gravísimo error pedagógico (y es el que hasta ahora hemos estado cometiendo) el adoptarla en los libros dedicados a escolares de los primeros cursos. Porque su espíritu debe pasar primero por la fase experimental de manejo de materiales, de observación y clasificación de los mismos. Sólo en los cursos superiores se planteará la necesidad de la deducción lógica.

Comenzamos, pues, por una fase experimental de manejo de figuras. Todo ello a base de acción, mediante un material muy sencillo, al alcance de cualquier fortuna: simples cuartillas, hojas de cuaderno, forros de los mismos, tiras de papel, regletas, hoy que éstas se van introduciendo en los Centros para el aprendizaje del cálculo.

Hoy día se siente imperiosamente la necesidad de una DIDÁCTICA ACTIVA, siendo el mismo alumno quien elabore los conceptos y conocimientos que ha de adquirir. Colocamos al niño en la actitud de descubridor, excitamos su sentimiento de curiosidad y su deseo de adivinación, tan fuertes en él. No le damos la doctrina hecha: le sugerimos problemas que ha de resolver por sí mismo, y poco a poco le vamos encaminando al fin propuesto.

El niño siente una curiosidad innata, un inmenso deseo de aprender el por qué de las cosas, y de hacer por su cuenta hallazgos y descubrimientos. Es todo un instinto de investigación el que manifiesta al romper los juguetes de movimiento para descubrir su mecanismo. Gracias a este instinto la humanidad progresa. Por eso hemos de poner tanto empeño en cultivarlo y desarrollarlo. Que no adquiera la falsa idea de que ya está todo hecho, sino al contrario, que se dé cuenta de que la mayor parte de las cosas están todavía por descubrir.

El método consiste, por tanto, en ofrecer series o cadenas de ejercicios o ejemplos prácticos, cortos y sencillos, cuyas soluciones estén al alcance

de los alumnos; de dificultad creciente y de tal modo enlazados que cada uno prepare el siguiente. Nada de aplicar reglas dadas de antemano. Que vaya descubriéndolas él. Para ello generalmente no es suficiente proponerle una serie de ejercicios, sino varias. El Profesor usará de su ingenio para idear otros ejemplos parecidos a los que se dan en el texto.

No es necesario insistir mucho para que el escolar enuncie a la perfección las reglas que ha descubierto. Quédese esto para un segundo estudio, cuando su vocabulario y facilidad de dicción se hayan desarrollado. Baste por ahora que tenga conciencia exacta de dichas reglas y sepa aplicarlas. Nos contentamos igualmente con que conozca las cosas y sepa nombrarlas. No le martiricemos exigiéndole definiciones científicas y rigurosas, cuya necesidad no es todavía capaz de comprender.

No queremos decir que no debe desarrollarse la memoria. Es una facultad que también precisa cultivo y desarrollo. Pero nunca empleando para ello las Matemáticas, a base de aprender de memoria cosas que no se entienden.

La tercera fundamental diferencia con el método antiguo es que en este libro SE VEN MENOS COSAS, PERO MEJOR ESTUDIADAS. Es ya un tópico todos los días repetido que los Cuestionarios están demasiado recargados. Asuntos como las fracciones que se repiten un año y otro. ¡Siempre se ven de prisa y corriendo sin tiempo para profundizar ni aprender de veras nada!

El método aquí seguido es más lento, pero sin duda más seguro y formativo. Es evidente que la finalidad principal de las Matemáticas es enseñar a pensar y desarrollar gradualmente la inteligencia de nuestros alumnos, más que atiborrarles con muchos conocimientos.

El estilo adoptado es el directo, dirigido al mismo niño, dándole órdenes de hacer esto y aquello. Creemos que así el escolar, además de sentirse más interesado, aprenderá de veras a estudiar. Porque no leerá dos líneas sin que se vea obligado a realizar alguna cosa, y por tanto a desentrañar el sentido de lo que ha leído. Conviene que en algunas ocasiones el método empleado por el Profesor consista en hacer leer en voz alta a uno de los alumnos un párrafo, y que a continuación realicen todos lo que han leído. En muchas otras ocasiones el diálogo directo de Profesor y alumnos, sin intermedio del libro, será preferible. Pero aun en estos casos la lectura y comentario posterior del texto serán necesarios.

Particular importancia se da desde las primeras lecciones a las operaciones de sacar factor común y trasposición de términos, factores y divisores, tan fundamentales para la resolución de problemas, enseñando desde muy temprano a despejar las incógnitas que puedan presentarse en los mismos, y en definitiva a resolver ecuaciones de primer grado con números naturales. Punto que consideramos fundamental y consecuencia obligada de las leyes formales, y que a menudo se descuida.

Terminamos dando las gracias más sinceras a cuantos nos han hecho el favor de sus consejos e indicaciones. Confiamos en que éstas nos seguirán llegando y en sucesivas ediciones se irán corrigiendo las deficiencias e incorrecciones.

LOS AUTORES

INDICE

		págs.
1.	Conjuntos: definiciones	13
2.	Diagramas	16
3.	La relación de inclusión	20
4.	Unión de conjuntos	26
5.	Intersección de conjuntos	33
6.	Correspondencias entre conjuntos	36
7.	El número natural	41
8.	Sistemas de numeración	46
9.	Adición de números naturales	56
10.	Práctica de la adición de números naturales	63
11.	La sustracción de números naturales	68
12.	Polinomios aritméticos	77
13.	Práctica de la sustracción	83
14.	Conceptos fundamentales de la Geometría plana	88
15.	Segmentos rectilíneos	95
16.	Ángulos	99
17.	Igualdad de figuras	104
18.	Rectas perpendiculares	110
19.	Medida de longitudes	117
20.	Unidades de longitud	125
21.	Clases de ángulos y adición de las mismas	133
22.	Multiplicación de números naturales	138
23.	Propiedades de la multiplicación de números naturales	143
24.	Práctica de la multiplicación	150
25.	La división exacta	154
26.	La división entera	160
27.	Triángulos	166
28.	Propiedades de los triángulos	171
29.	Paralelogramos	177
30.	Clasificación de los paralelogramos	185
31.	Clasificación de los cuadriláteros	192
32.	Unidades de área (superficie)	195
33.	Áreas de figuras planas	202

págs.

34. Fracciones 206
35. Operaciones con fracciones 213
36. Números decimales 220
37. Adición y sustracción de números decimales 225
38. Multiplicación y división de números decimales 228
39. La circunferencia y el círculo 234
40. Arcos y cuerdas 240
41. Polígonos 244
42. Longitud de la circunferencia y área del círculo 251

1

Conjuntos: definiciones

1. Idea de conjunto. — Coloca sobre la mesa tu cuaderno de Matemáticas, tu libro de Matemáticas y tu pluma. Estos tres objetos forman un **conjunto.** Lo representaremos así:

$$\{ \text{cuaderno, libro, pluma} \}$$

A cada uno de los tres objetos se le llama **elemento** del conjunto.

EJEMPLOS. 1. Escribe el conjunto de las vocales del alfabeto. Así: $\{ a, e, i, o, u \}$.

2. Escribe el conjunto de los números impares dígitos, o sea de una sola cifra. Así: $\{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$.

3. Define conjuntos en la adjunta figura:

4. Representa el conjunto de las regiones de España que limitan con el mar, y el conjunto de las regiones que no tienen costa.

5. Define el conjunto de regiones españolas que limitan con Portugal y el de las que limitan con Francia.

2. Descripción o definición de un conjunto. — En un partido de fútbol un amigo te pregunta cuál es el equipo de tu clase. Tú podías contestarle diciendo los nombres de todos los jugadores que forman el equipo. Entonces habrías definido este conjunto *enumerando todos los elementos que lo integran.*

Pero lo más sencillo es que le contestes: «Los de mi clase son los que llevan camiseta roja». Entonces has definido el conjunto enunciando una *propiedad característica* del mismo.

Un conjunto se puede definir de cualquiera de estas dos formas. Pero en todo caso debe quedar bien claro si un elemento determinado pertenece o no pertenece al conjunto.

EJEMPLOS. 1. ¿Está bien definido «el conjunto de los alumnos de esta clase que tienen los ojos azules»?

No, porque no hay separación clara entre los colores de los ojos de muchas personas.

2. Escribe enumerando todos sus elementos el conjunto de los alumnos de tu clase que cumplan la siguiente propiedad característica:

a) tener 11 años;
b) tener pelo rubio;
c) tener gafas;
d) empezar su apellido por T.

3. Enuncia la propiedad característica del conjunto

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

3. Relación de pertenencia. — Cualquier elemento de un conjunto diremos que **pertenece** al conjunto. Por ejemplo, el elemento «libro» pertenece al conjunto { libro, cuaderno, pluma }, lo que se escribe así:

$$\text{libro} \in \{ \text{libro, cuaderno, pluma} \}$$

El símbolo $\in$ significa *pertenece a.* Podíamos simplificar todavía más esta notación representando cada palabra por su letra inicial, escribiendo

$$\text{l} \in \{ \text{l, c, p} \}$$

Generalmente los conjuntos se representan por las letras mayúsculas A, B, C... Así, llamando A al conjunto citado anteriormente, escribimos

$$A = \{ \text{l, c, p} \} \; ; \; \text{l} \in A$$

EJEMPLOS. 1. Escribe que el río Ebro pertenece al conjunto de los ríos españoles. Así:

$$A = \{ \text{ríos españoles} \} \; ; \; \text{Ebro} \in A$$

2. ¿Cómo escribirías que marzo no pertenece al conjunto C de los meses que empiezan por j?

Parece natural que si $\in$ significa «pertenece», cuando se quiera escribir «no pertenece» se tache el signo anterior y se ponga $\notin$. Así escribiremos

$$\text{Marzo} \notin C$$

EJERCICIOS

1. Representa por A el conjunto de los ríos españoles. Escribe que el Ebro pertenece al conjunto A, y que el Po no pertenece a dicho conjunto.

2. Designa por la letra B al conjunto de todos los cuadriláteros de la Geometría plana. Empleando los símbolos $\in$ y $\notin$, indica si cada una de las siguientes figuras pertenece o no al conjunto B: a) un triángu t; b) un rombo *r*; c) un trapecio *t'*; d) un exágono *e*; e) un paralelogramo *p*.

3. Escribe el conjunto de los días de la semana, designando cada uno por su letra minúscula inicial. Si hay dos días que empiezan por la misma letra, añádeles una segunda letra para distinguirlos, por ejemplo el martes *mt*, y el miércoles, *mc*.

4. Escribe el conjunto de los colores del arco iris, designándolos por sus iniciales. Si varios comienzan por la misma letra, añade una segunda. Representa si pertenecen o no al conjunto C anterior los siguientes colores: *a*) negro; *b*) anaranjado; *c*) marrón; *d*) violeta.

5. Escribe el conjunto D de las letras de la palabra Alhambra. Las letras repetidas cuentan por una sola Representa si las siguientes letras pertenecen o no al conjunto D: *a*) h; *b*) g; *c*) m; *d*) n.

6. Escribe el conjunto E de las palabras que pueden formarse con las letras *a*, *m*, *o*, empleando una y sólo una vez en cada palabra. Indica si pertenecen o no al conjunto anterior E las siguientes palabras: *a*) amo; *b*) ama; *c*) acto; *d*) mao.

7. ¿Cuál es la propiedad característica de los siguientes conjuntos; *a*) A = {1, 2, 3, 4, 5}; *b*) B = {2, 4, 6, 8}; *c*) C = {10, 11, 12, ... 99}; *d*) D = {11, 13, 15, ... 99}?

8. Representa el conjunto formado por todas las provincias españolas, eligiendo para cada una las letras de su correspondiente matrícula de automóvil.

9. Escribe el conjunto de todos los reyes españoles de nombre Alfonso. Puedes hacerlo sencillamente escribiendo las cifras romanas desde I hasta XIII.

10. Representa el conjunto de los jugadores de un equipo de fútbol por el número que llevan a la espalda.

11. Define los siguientes conjuntos por su propiedad característica:

(a) {domingo, lunes, martes}
(b) {vista, oído, olfato, tacto, gusto}
(c) {Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Octubre, Diciembre}
(d) {5, 10, 15, 20, 25}
(e) {bastos, copas, oros, espadas}

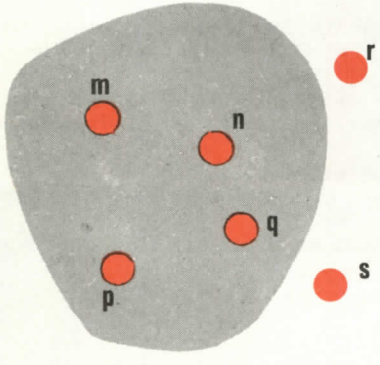
2

Diagramas

4. Diagramas de Venn. – Los pueblos de una Provincia se representan por puntos situados en el interior de un contorno que es el *límite* de la Provincia. Así también los elementos de un conjunto se representan con frecuencia por puntos situados dentro de un contorno de forma cualquiera, de ordinario una circunferencia o una curva cerrada de forma ovalada.

De modo que los puntos interiores al contorno representan elementos que pertenecen al conjunto, y los puntos exteriores al contorno representan objetos que no pertenecen al conjunto. *Nunca un elemento se representa sobre el mismo contorno.*

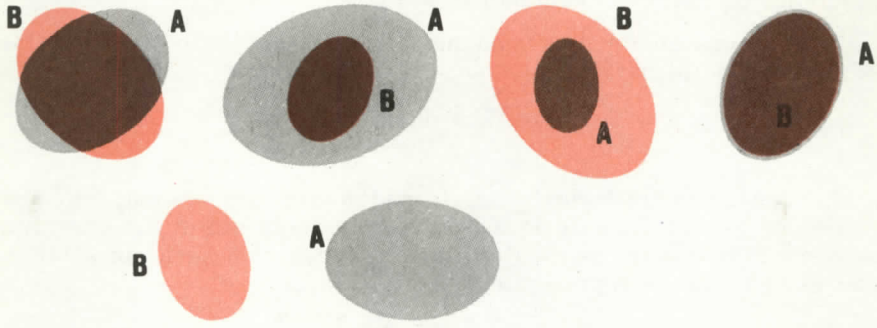
EJEMPLOS. 1. Representa por un diagrama de Venn el conjunto A = { m, n, p, q } y expresa que los elementos *r* y *s* no pertenecen a dicho conjunto. En la figura tienes la solución: los puntos *m*, *n*, *p* y *q* están dentro del contorno, y los puntos *r* y *s* están fuera de dicho contorno.



2. Representa por un diagrama de Venn el conjunto formado por los 7 colores del arco iris y expresa que el negro no pertenece a dicho conjunto.

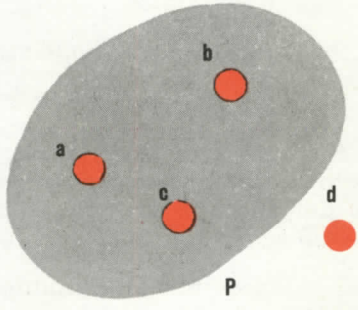
3. Representa por un diagrama de Venn el conjunto { Luisa, Alicia, Margarita, Pepita }.

4. ¿Cómo son los conjuntos A y B en los siguientes esquemas?



5. Expresa gráficamente que Barcelona, Tarragona, Lérida y Gerona pertenecen al conjunto de las provincias catalanas, y que Valencia no pertenece a dicho conjunto.

6. Sea P el conjunto representado en el diagrama de la figura adjunta. Explica en él las relaciones, a $\in$ P, d $\notin$ P y otras que tú escribirás.



5. Diagrama lineal. — Cuando los elementos de un conjunto están naturalmente ordenados, puede resultar conveniente colocar los puntos representados sobre una línea recta.

Por ejemplo, si queremos representar los días de la semana, lo haremos así:

Es lo que se denomina un *diagrama lineal.*

La recta lo mismo puede colocarse horizontal que vertical, o en cualquier otra posición.

Ejemplos. 1. Representa en un diagrama lineal el conjunto

$$\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

2. Representa en un diagrama vertical el conjunto de los reyes españoles de nombre Fernando (I a VII).

3. Expresa en un diagrama horizontal el conjunto de las cartas de espadas de la baraja española.

$$\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ s,\ c,\ r\ \}$$

6. Conjuntos unitarios. — Si te piden que des el conjunto formado por los satélites de la Tierra, responderás que dicho conjunto no tiene más que un elemento. Pues la Tierra sólo tiene un satélite, que es la Luna. Se representa así dicho conjunto:

$$\{\ \text{Luna}\ \}$$

Aunque no tenga más que un elemento se le considera como verdadero conjunto.

Se llama *conjuntos unitarios* a los que están formados por un solo elemento.

EJEMPLOS. 1. Da varios ejemplos de conjuntos unitarios: conjunto de los porteros de un equipo de fútbol, conjunto de los meses del año que comienzan por la letra F, conjunto de los puntos en que se cortan dos rectas, etc.

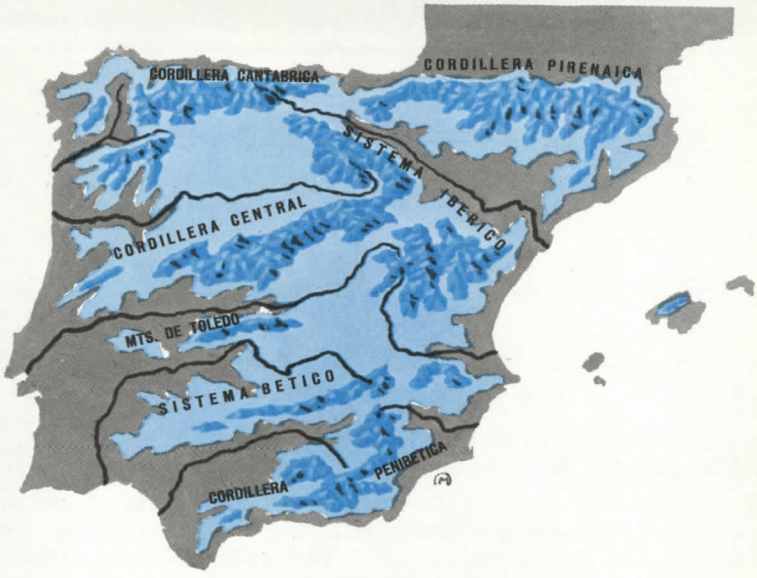
2. Representa el conjunto de los colores del arco iris que empiezan por la letra *r* y haz su diagrama de Venn.

7. Conjunto vacío. — ¿Cuál es el conjunto de los hombres que en este momento viven en la Luna? Dicho conjunto no posee ningún elemento, ya que todavía ningún hombre ha podido poner su pie en nuestro satélite. Se le considera, sin embargo, como verdadero conjunto, y se le llama *conjunto vacío.*

Conjunto vacío es el que no tiene ningún elemento.

Se ha convenido en representarlo por la letra noruega ø, y también por el símbolo $\{\ \}$.

EJEMPLOS. 1. Inventa diversos ejemplos del conjunto vacío: conjunto de los compañeros de tu clase que tienen 5 años, de los colores del arco iris que empiezan por *b*, de los reyes godos que poseían automóvil, etc.



EJERCICIOS

1. Indica algunos de los conjuntos que veas en la figura adjunta. Llama A al conjunto de los ríos que aparecen en la misma; B al conjunto de las cordilleras o sistemas; C al conjunto de naciones que se ven en todo o en parte; D al conjunto de islas; E al conjunto de penínsulas que aparecen dibujadas, y F al conjunto de lagos que se ven.

2. ¿Cómo son los conjuntos E y F del ejercicio 1?

3. Traza un diagrama de Venn para los conjuntos A, B, C y D del ejercicio 1.

4. ¿Está bien definido el conjunto de los alumnos que consiguieron aprobar el examen de Ingreso en el Bachillerato el curso pasado? ¿Y el de los que conseguirán aprobarlo el curso próximo?

5. Haz un diagrama lineal para el conjunto de las vocales de nuestro alfabeto castellano, y otro para el conjunto de las consonantes.

6. Traza un diagrama para el conjunto de los números pares menores que 20.

7. ¿Cómo es el conjunto de los alumnos de tu clase que tienen 17 años?

8. ¿Cómo es el conjunto de los planetas Marte?

9. Escribe las relaciones de pertenencia que existen entre los números 3, 4 y 5 y los siguientes conjuntos: *a*) conjunto N de los números naturales; *b*) conjunto P de los números pares; *c*) conjunto I de los números impares.

10. Representa mediante un diagrama de Venn estos casos: *a*) el conjunto A contiene todos los elementos del conjunto B y algunos más; *b*) el conjunto A no contiene ningún elemento de B; *c*) el conjunto A contiene algunos elementos de B y otros que no son de B.

3

La relación de inclusión

8. Subconjuntos: definiciones. — Considera los dos conjuntos

$$A = \{ a, b, c \} \text{ y } B = \{ b, c \}$$

y observa que todo elemento de B pertenece a A. Decimos que B es un **subconjunto** o **parte** de A, o que B **está contenido** en A.

El conjunto de todos los españoles es una **parte** o **subconjunto** del conjunto formado por todos los europeos. También el conjunto de los alumnos de tu clase que llevan gafas es una **parte** o **subconjunto** de la clase.

En general, *un conjunto B es* **subconjunto** o **parte** *de A cuando todo elemento de B pertenece a A.*

EJEMPLOS. 1. Escribe un subconjunto de los ríos españoles que desembocan en el Océano Atlántico. Así: { Miño, Duero, Tajo, Guadiana, Guadalquivir }.

2. Escribe el subconjunto de los colores del arco iris formado por los colores que empiezan por *a*. Así: { an, am, az, añ }.

3. ¿Cuál es la propiedad característica del subconjunto { verde, violeta } del conjunto de colores del arco iris?

4. Escribe distintos subconjuntos *unitarios* del conjunto A = { a, b, c, d }. ¿Cuántos puedes formar?

5. Escribe distintos subconjuntos *binarios*, o sea formados por dos elementos, del conjunto A del ejercicio anterior. ¿Cuántos obtienes?

9. Notación. — Si B es un subconjunto de A, esto se representa simbólicamente así:

$$B \subset A$$

lo cual sabemos quiere decir que todo elemento de B pertenece a A.

No deben confundirse los símbolos $\in$ y $\subset$: *el símbolo* $\in$ *establece una relación entre un elemento y un conjunto, mientras que* $\subset$ *establece una relación entre dos conjuntos.*

EJEMPLOS. 1. Llama C al conjunto de las vocales y C′ al conjunto de las letras del alfabeto, y representa simbólicamente que C es un subconjunto de C′. Así: $C \subset C'$.

2. Llama F al conjunto de los jugadores de un equipo de fútbol, y escribe que son subconjuntos suyos los siguientes: *a*) el conjunto D de los defensas; *b*) el conjunto J de los jugadores que juegan en la delantera; *c*) el conjunto P de los que juegan en la portería. (Representa los jugadores por los números que llevan a la espalda.)

3. El conjunto $M = \{ 1, 2, 3 \}$ ¿es subconjunto del conjunto $N = \{ 3, 2, 1 \}$? Sí, evidentemente, porque todo elemento de M lo es también de N.

4. El conjunto $E = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ¿es subconjunto del $H = \{ 6, 5, 4, 3, 2, 1 \}$? Escríbelo simbólicamente.

10. Relación de inclusión: representación gráfica. — Si B es un subconjunto de A, lo que escribíamos

$$B \subset A,$$

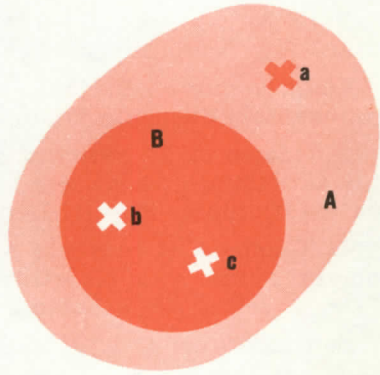
se dice que entre los dos conjuntos existe la **relación de inclusión.**

Si B no es subconjunto de A, se escribe

$$B \not\subset A$$

Por ejemplo, si $B = \{2, 5\}$, y $A = \{2, 3, 4\}$, se tiene $B \not\subset A$

Si queremos representar gráficamente esta relación por un diagrama de Venn, se dibuja el recinto correspondiente al subconjunto B dentro del recinto que representa el conjunto A. En la figura $B = \{ b, c \} \subset A = \{ a, b, c \}$.



EJEMPLOS. 1. El conjunto vacío, ¿está contenido en cualquier otro conjunto?

Sí, ya que el conjunto vacío no contiene ningún elemento, y por tanto puede considerarse que todos sus elementos pertenecen a cualquier conjunto.

2. Expresa la conclusión del ejercicio anterior mediante el símbolo de la relación de inclusión.

Se expresa así:

$$\emptyset \subset A$$

designando por $\emptyset$ al conjunto vacío, y por A un conjunto cualquiera.

3. Expresa que el punto *a* de la figura anterior pertenece al conjunto A y no pertenece al conjunto B.

4. Representa mediante diagramas de Venn tres conjuntos A, B y C que verifiquen las relaciones

$$C \subset B \subset A$$

11. Identidad o igualdad de conjuntos. — Compara el conjunto A de las vocales del alfabeto y el conjunto B = { a, e, i, o, u }. Ves que ambos son el mismo conjunto: se componen de los mismos elementos. Decimos que ambos son **idénticos** o **iguales.**

Dos conjuntos A y B son iguales o idénticos cuando tienen los mismos elementos, o sea son el mismo conjunto.

Se representa así

$$A \equiv B; \text{ o } A = B$$

EJEMPLOS. 1. Sea A = { 1, 2, 3, 4 } y B = { 3, 1, 4, 2 }. ¿Son idénticos A y B? Sí, ya que tienen los mismos elementos.

Observa que un conjunto no cambia si sus elementos se disponen en otro orden.

2. Sea A = { 5, 6, 7 } y B = { 5, 6, 5, 7 }. ¿Son idénticos los conjuntos A y B en este caso? Sí, ya que tienen los mismos elementos.

Observa que un conjunto no cambia si sus elementos se repiten. Por eso cada elemento de un conjunto se cuenta una sola vez.

3. Llama A al conjunto de las 5 primeras letras del alfabeto, y B al conjunto de las letras del alfabeto anteriores a la *f*. ¿Cómo son los conjuntos A y B? Define por enumeración dichos conjuntos.

4. Compara el conjunto M de las letras de la palabra TORRE, con el conjunto N de las letras de la palabra RETO, y con el conjunto P de las letras de la palabra TORERO.

Son idénticos: M ≡ N ≡ P

M = { t, o, r, e } ; N = { r, e, t, o } ; P = { t, o, r, e }

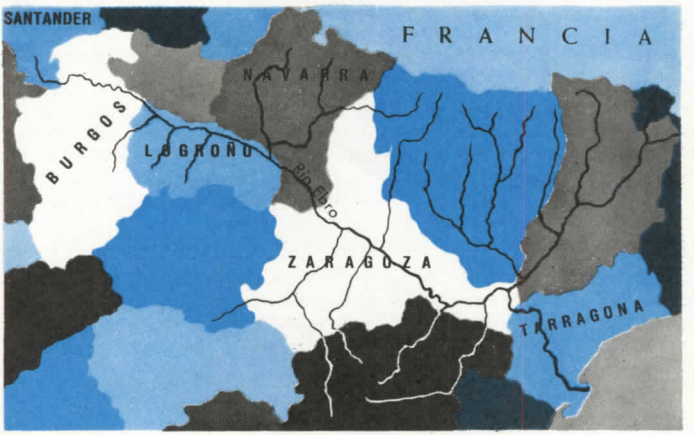
Las tres palabras están compuestas de las mismas cuatro letras.

EJERCICIOS

1. Se me pide que haga una obra de caridad. Miro al portamonedas y veo que sólo tengo una moneda de 5 pesetas, otra de 25 y otra de 50. Usando sólo estos tres elementos, representa las posibles limosnas que puedo hacer dando una moneda, dando dos monedas y dando las tres monedas. Observa que se trata de los diversos subconjuntos del conjunto $\{5, 25, 50\}$.

2. Se dan los siguientes conjuntos: A = {triángulos}, B = {triángulos isósceles}, C = {triángulos equiláteros}. Establece entre ellos las relaciones de inclusión.

3. ¿Cuál es la propiedad característica del subconjunto A formado por las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*?



4. Define por enumeración el subconjunto B de las provincias de España por las que pasa el río Ebro.

5. Expresa las relaciones de inclusión entre los conjuntos: A = {cuadriláteros}, B = {rectángulos}, C = {cuadrados}, D = {rombos}.

6. Se nos dan los conjuntos: H = {d}, I = {c, d}, J = {a, b, c}; K = {a, b} y M = {a, b, d}. Expresa todas las relaciones de inclusión que existan entre ellos.

7. Dado el conjunto H = {7, 8, 9}, halla todos los subconjuntos posibles de H.

8. Si $a \in A$, $A \subset B$ y $B \subset C$, determina si $a \in C$.

9. Si $a \in A$ y $A \subset B$, ¿se deduce que $a \in B$?

10. Si $a \in A$ y $a \in B$, ¿se sigue que $A \subset B$?

11. Si $A \subset B$ y $B \subset D$, ¿qué otra relación de inclusión se deduce?

12. Si $a \in B$, $C \subset B$ y $C \subset D$, halla si $a \in D$.

13. Escribe todos los subconjuntos de cada uno de los siguientes conjuntos y cuenta su número en cada caso:

a) $\{\text{Luis, José}\}$ *b*) $\{a, b, c\}$

c) $\{A\}$ *d*) $\{0, 2, 4, 6\}$

14. Determina si cada una de las siguientes expresiones es cierta o falsa:

a) $3 = \{3\}$ *b*) $3 \in \{3\}$ *c*) $\emptyset = 0$

d) $0 \in \emptyset$ *e*) $5 \in \{\{5\}\}$ *f*) $3 \in \{3, 4\}$

g) $4 \in \{\{4\}, 4\}$ *h*) $2 \in \{\{1, 2\}, \{2\}\}$ *i*) $\{3, 4\} \subset \{3, 4, 5\}$

15. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son idénticos: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, b, a, c\}$; $C = \{b, c, b, a\}$; $D = \{c, a, c, b\}$?

16. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son idénticos: E = conjunto de las letras de la palabra TORRES; F = conjunto de las letras de la palabra ESTEREO; G = conjunto de las letras de la palabra RESTO; $H = \{e, o, r, s, t\}$?

17. Determina cuál de las relaciones $A \equiv B$ o $A \not\equiv B$ es cierta para cada uno de los siguientes pares de conjuntos:

a) A = conjunto de los números naturales menores que 5; B = conjunto de los números naturales x, tales que $(x + 1)^2$ es menor que 29.

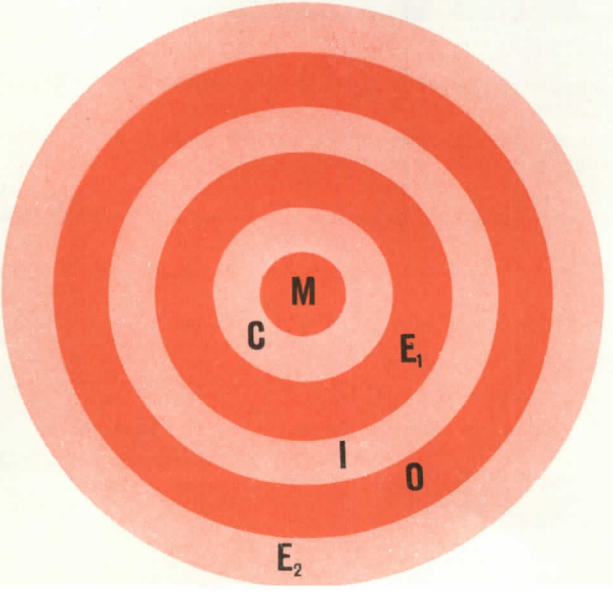
b) A = conjunto de los números naturales menores que 6; B = conjunto de los números naturales x, tales que $(x + 1)^2$ es menor que 40.

c) A = conjunto de los números impares; B = conjunto de los números naturales x, tales que x^2 es impar.

d) A = conjunto de los cuadriláteros; B = conjunto de los polígonos.

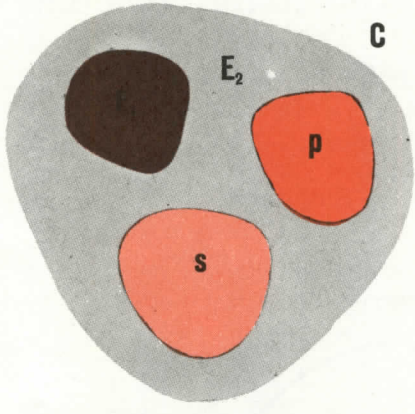
18. Representa gráficamente la siguiente relación: los madrileños, M, son un subconjunto de los castellanos C, éstos son un subconjunto de los españoles, E_1, éstos son un subconjunto de los ibéricos, I, éstos son un subconjunto de los occidentales, O, y éstos son un subconjunto de los europeos E_2. Es decir

$$M \subset C \subset E_1 \subset I \subset O \subset E_2$$



Cada conjunto contiene a todos los interiores.

19. Sea C el conjunto de las personas que trabajan en el colegio. Son subconjuntos de C: los profesores, P, los alumnos de primera enseñanza, E_1, los de segunda enseñanza E_2, el personal de servicio S. Representémoslo.



20. Para los conjuntos A, B y C, determina si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Para cada expresión falsa escribe un ejemplo que confirme su falsedad.

a) Si $B \equiv A$ y $A \equiv C$, entonces $B \subset C$.
b) Si $B \subset C$ y $B \subset A$, entonces $C \subset A$.
c) Si $B \subset A$ y $A \subset C$, entonces $B \equiv C$.
d) Si $B \equiv C$ y $B \subset A$, entonces $C \subset A$.

21. Si los siguientes conjuntos se refieren a figuras de Geometría plana, determina la verdad o falsedad de cada relación:

a) Si $x \in \{\text{cuadrados}\}$, entonces $x \in \{\text{rectángulos}\}$.
b) Si $x \in \{\text{cuadriláteros}\}$, entonces $x \in \{\text{polígonos}\}$.
c) Si $x \in \{\text{triángulos equiláteros}\}$, entonces $x \in \{\text{triángulos isósceles}\}$.
d) Si $x \in \{\text{rombos}\}$, entonces $x \in \{\text{paralelogramos}\}$.

22. Las dos secciones A y B de primer curso de un determinado Centro de enseñanza tienen el mismo número de alumnos. ¿Son idénticos los conjuntos A y B?

23. Escribe las relaciones de pertenencia que existen entre los números 7, 8 y 9 y los siguientes conjuntos: *a*) N = números naturales; *b*) I = números impares. Escribe también la relación de inclusión entre dichos conjuntos.

4

Unión de conjuntos

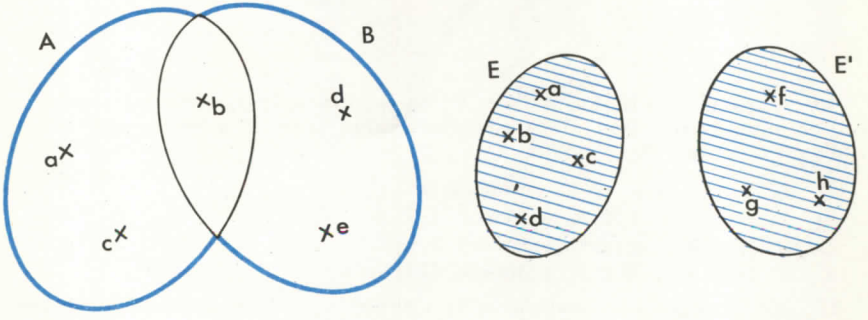
12. Reunión o unión de conjuntos.

Sean los conjuntos A = {a, b, c}, B = {b, d, e} y C = {a, b, c, d, e}.

Notamos que el conjunto C contiene todos los elementos de A y todos los de B, comunes y no comunes. Al conjunto C le llamamos *unión* o *reunión* de los conjuntos A y B, y se representa así:

$$C = A \cup B$$

Se llama *unión o reunión de dos conjuntos A y B al conjunto de elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.*



En la figura 1.ª el conjunto unión C vendrá representado por el recinto de trazo coloreado.

Sean los conjuntos E = {a, b, c, d} y E' = {f, g, h}. En este caso los dos conjuntos no tienen ningún elemento común. Se llaman conjuntos *disjuntos.*

Los dos recintos que los representan tampoco tienen puntos comunes (figura 2.ª). En este caso particular la operación unión se llama **adición**, y el conjunto C que resulta se llama conjunto **suma**, y se representa así

$$C = E + E' = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Los dos recintos rayados representan el conjunto suma C.

13. Ejemplos de unión de conjuntos.

1.° Sea A = {a, b, c, d} y B = {f, b, d, g}. Luego

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$$

2.° $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3.° $\{3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
4.° $\{6, 7\} \cup \{\ \} = \{6, 7\} \cup \emptyset = \{6, 7\}$

5.° Sea A el conjunto de los números naturales pares, y B el conjunto de los números naturales impares.

Entonces A ∪ B es el conjunto de todos los números naturales.

6.° Sea A el conjunto de los números naturales mayores que 25, y B el conjunto de los números naturales menores que 44.

Entonces A ∪ B es el conjunto de todos los números naturales.

7.° Sea A el conjunto de todos los alumnos de tu colegio, y B el conjunto de los alumnos de tu colegio que juegan al baloncesto.

Entonces A ∪ B es el conjunto de todos los alumnos de tu colegio.

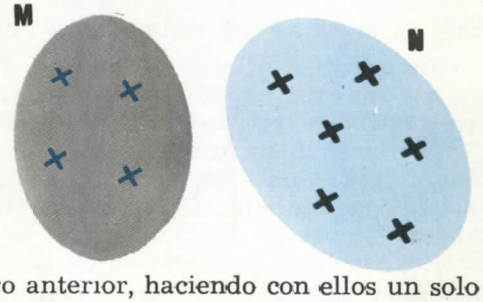
8.° Sea A el conjunto de todos los rectángulos posibles en un plano, B el conjunto de todos los cuadrados posibles en el plano.

Entonces A ∪ B es el conjunto de todos los rectángulos del plano.

14. Conjuntos disjuntos. — Sean los conjuntos $E = \{a, b, c, d\}$ y $F = \{f, g, h\}$. No tienen ningún elemento común. Son conjuntos **disjuntos.**

Ejemplos. 1. ¿Son disjuntos los conjuntos $A = \{2, 4, 7, 8\}$ y $B = \{1, 5, 7, 9\}$? No, porque tienen común el elemento 7.

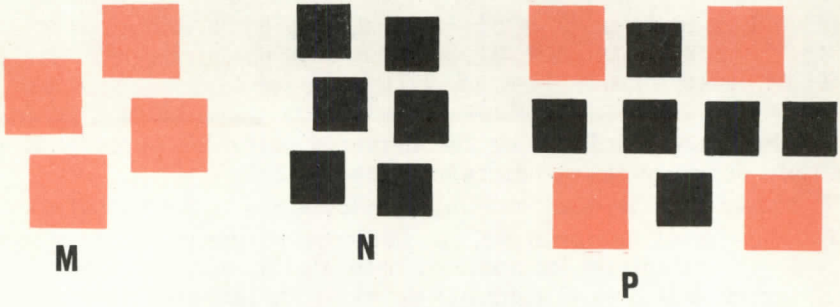
2. Parte en 4 trozos una cuartilla blanca, coloreándolos de rojo, y en 6 trozos una hoja de papel de cuaderno rayado o cuadriculado, y los coloreas de negro. Llama M el conjunto formado por los cuatro primeros trozos y N al formado por los 6 segundos. ¿Son disjuntos los conjuntos M y N?



3. Representa por diagramas de Venn los dos conjuntos M y N del ejemplo anterior. ¿Tendrán puntos comunes los dos recintos?

4. Junta los dos conjuntos M y N del ejemplo 4 del número anterior, haciendo con ellos un solo conjunto P. A este conjunto único P, que contiene todos los papelitos de M y todos los de N, le llamamos conjunto *suma* o *reunión*, y lo representamos por

$$P = M + N$$



La operación que de los conjuntos M y N nos permite obtener el conjunto P se llama **adición.**

5. Sea P el conjunto de todos los números pares, e I el de todos los impares. ¿Qué es el conjunto P + I?

6. Si llamamos C al conjunto de los alumnos de 1.ª Enseñanza de tu colegio, y D al de los alumnos de 2.ª Enseñanza, ¿qué es la suma C + D?

15. Propiedad conmutativa de la adición de conjuntos. — Sean los conjuntos disjuntos A = {1, 2, 3} y B = {4, 5}. Halla A + B y B + A.

Se tiene $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B + A = \{4, 5, 1, 2, 3\}$

¿Cómo son los conjuntos A + B y B + A? Son idénticos, por constar de los mismos elementos, aunque estén en distinto orden. Luego

$$A + B = B + A$$

Esta es la **propiedad conmutativa** de la adición de conjuntos.

EJEMPLOS. 1. Luisa tiene en un balcón un tiesto con tres flores y otro con cinco flores. En la ventana tiene un florero con cinco flores y otro con tres flores. ¿Dónde tiene mayor número de flores?

2. En tu mesa dispones de un conjunto C de bolas blancas y de un conjunto D de bolas negras. Al conjunto C le sumas el D, o sea llevas las bolas negras al lado de las blancas, y obtienes C + D. Ahora vuelves las bolas negras a su lugar primitivo y al conjunto D le sumas el C, o sea, llevas las bolas blancas al lado de las negras, y obtienes D + C. ¿Cómo son los dos conjuntos C + D y D + C?

16. Propiedad asociativa de la adición de conjuntos. — Divide una cuartilla en tres partes iguales. La primera la divides en tres trozos que numeras 1, 2 y 3, y llamas A al conjunto que forman, o sea,

$A = \{1, 2, 3\}$. La segunda parte la divides en dos trozos que numeras 4 y 5, y llamas B al conjunto que forman, o sea $B = \{4, 5\}$. La tercera parte la divides en cuatro trozos, que numeras 6, 7, 8 y 9, y llamas C al conjunto que forman, o sea, $C = \{6, 7, 8, 9\}$. ¿Cómo podríamos sumar los tres conjuntos A, B y C? De diversas formas.

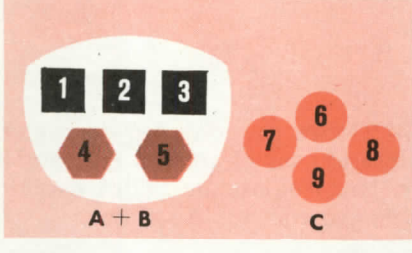
Podríamos juntar primero A y B, con lo que obtenemos el conjunto

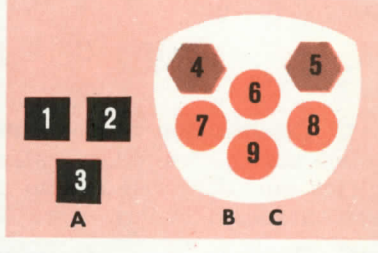
$$A + B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y a éste sumarle el C, con lo que obtenemos

$$(A + B) + C = \{1, 2, 3, 4, 5\} + \{6, 7, 8, 9\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = D$$

El paréntesis de (A + B) es un mandato de prioridad, y significa que la primera operación que hay que realizar es la que va dentro del mismo.





Pero también podíamos haber sumado primero B y C, obteniendo

$$B + C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y a continuación éste sumarlo al A, resultando

$$A + (B + C) = \{1, 2, 3\} + \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = D$$

El resultado en ambos casos es el mismo.

Luego

$$\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C)}$$

Esta es la **propiedad asociativa** de la adición de conjuntos.

Ejemplos. 1. Dados los tres conjuntos M, N y P, aplica las propiedades asociativa y conmutativa a la suma de los mismos, y haz ver diversas formas en que se puede obtener dicha suma. Por ejemplo:

$$(M + N) + P = M + (N + P) = (N + P) + M = \\ = N + (P + M) = (P + M) + N = P + (M + N)$$

Indica en cada caso qué propiedad has aplicado: la conmutativa o la asociativa.

2. Los tres conjuntos M, N y P del ejercicio anterior, ¿podemos sumarlos en el orden y forma que queramos? Por ello dicha suma podemos escribirla simplemente

$$M + N + P$$

sin necesidad de paréntesis. Observa que esto sólo es posible en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa.

3. Explica lo que significa la expresión siguiente:

$$[(M + N) + P] + Q$$

¿Podíamos escribirla simplemente $M + N + P + Q$?

4. Dados los conjuntos $H = \{a, b, c, d\}$; $G = \{e, f\}$ y $J = \{l, m, n\}$, halla $H + G$, $(H + G) + J$, $G + J$ y $H + (G + J)$, y comprueba que

$$(H + G) + J \equiv H + (G + J)$$

17. Clasificación de conjuntos. — Tienes un conjunto de regletas de diversos colores. Clasifícalas colocando en el mismo montón las regletas que tienen el mismo color. Una regleta no podrá estar en dos montones a la vez, o sea éstos son conjuntos disjuntos.

Has dividido, pues, el conjunto de las regletas en conjuntos disjuntos tales que su suma es igual al conjunto primitivo. Cada montón o conjunto disjunto se llama *clase*, y decimos que has hecho una *clasificación* o *partición* del conjunto de regletas.

EJEMPLOS. 1. Representa por diagramas de Venn la clasificación del conjunto de regletas.

Aparecerán unos recintos análogos a los de la figura adjunta.

2. Los alumnos de tu colegio los distribuyes por cursos. ¿Puede un alumno estar en dos cursos distintos? La suma de los alumnos de todos los cursos ¿es igual al conjunto de alumnos del colegio? ¿Has hecho una clasificación? ¿Cuáles son las clases en este caso?

3. Considera los animales *vertebrados* que comprenden como caso particular a los *mamíferos* y éstos a su vez como caso particular a los *roedores*. ¿Has hecho con estos animales una clasificación en el sentido explicado anteriormente? No, ésta se denomina *clasificación por inclusión*, pues cada conjunto está incluido en el anterior.

4. Representa mediante diagramas de Venn los animales de que se habla en el número anterior. Cada recinto queda dentro del anterior.

Esta *clasificación por inclusión* se emplea también mucho en Matemáticas. Tiene la ventaja de que toda propiedad demostrada para un conjunto, queda demostrada para los conjuntos que incluye.

EJERCICIOS

1. Sea A el conjunto de todos los numeros pares, y B el conjunto de todos los números impares. ¿Qué es el conjunto A + B?

2. Sea C el conjunto de todos los alumnos de primera enseñanza de tu colegio, y D el conjunto de los alumnos de segunda enseñanza del mismo. ¿Qué es el conjunto C + D?

3. Dados los conjuntos $E = \{a, b, c\}$ y $F = \{x, y\}$, halla E + F y F + E. ¿Son idénticos estos dos conjuntos?

4. Si el conjunto A + B es el conjunto vacío, ¿cómo son A y B?

5. En el portamonedas llevas un conjunto X de monedas de 1 peseta, otro conjunto Y de monedas de 5 pesetas y otro conjunto Z de monedas de 25 pesetas. ¿Es ésta una clasificación ordinaria o una clasificación por inclusión?

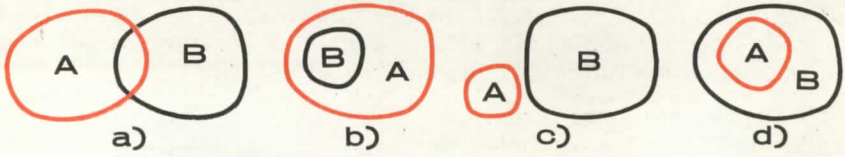
6. Aplica la propiedad asociativa a la suma de los conjuntos X, Y y Z del ejercicio anterior.

7. En una estación de ferrocarril despachan billetes de 1.ª, 2.ª y 3.ª clase. ¿Son clases en el sentido explicado en esta lección estos conjuntos de billetes?

8. ¿Cómo harías una clasificación de los cromos que has pegado en un álbum?

9. Traza una circunferencia y una recta secante. ¿Cómo puedes hacer una *clasificación* de los puntos de la secante? ¿Y de los puntos de la circunferencia?

10. En los siguientes diagramas de Venn sombrea o colorea A ∪ B:



11. Sea A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, y C = {3, 4, 5, 6}. Halla:
a) A ∪ B; *b*) A ∪ C; *c*) B ∪ C; *d*) B ∪ B.

12. Sean A, B y C los conjuntos del problema 2. Halla:
a) (A ∪ B) ∪ C; *b*) A ∪ (B ∪ C).

Comprueba que son iguales.

13. Sea M = {Juan, Pedro, José}, N = {Juan, Marcos, Manuel} y P = {Marcos, Manuel, Javier}. Hallar *a*) M ∪ N, *b*) N ∪ P, *c*) M ∪ P.

14. Dados los conjuntos V = {vocales del alfabeto} y N = {letras de «Isabel la Católica»}:

a) describe por extensión los dos conjuntos; *b*) halla V ∪ N.

15. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {3, 5, 6, 9}, C = {1, 4, 7}:
a) traza un diagrama de Venn que represente los tres conjuntos A, B y C; *b*) sombrea o colorea el conjunto B ∪ C; *c*) halla A ∪ B ∪ C.

16. ¿A qué es igual A ∪ B en los siguientes casos:
a) Los conjuntos A y B son disjuntos.
b) Los conjuntos A y B son iguales.
c) El conjunto A es subconjunto de B.
d) El conjunto B es subconjunto de A.

17. Sean A y B dos conjuntos no comparables, o sea tales que ni A ⊂ B, ni A ⊃ B. Dibuja un diagrama lineal para los conjuntos A, B y A ∪ B. ¿Son A y B subconjuntos de A ∪ B?

18. ¿Cómo es A respecto de A ∪ A?

19. ¿A qué es igual A ∪ ∅?

20. ¿Qué podemos asegurar de A y de B, si A ∪ B = ∅?

5

Intersección de conjuntos

18. Definición. — Se tienen los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {b, d, f}.

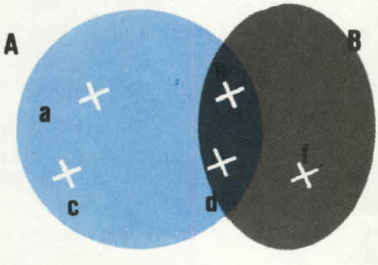
¿Cuál es el conjunto de los elementos comunes a ambos? Es el conjunto C = {b, d}. Se le llama **intersección** de los conjuntos A y B, y se representa así:

$$C = A \cap B$$

Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes a ambos, o sea que pertenecen a A y también a B.

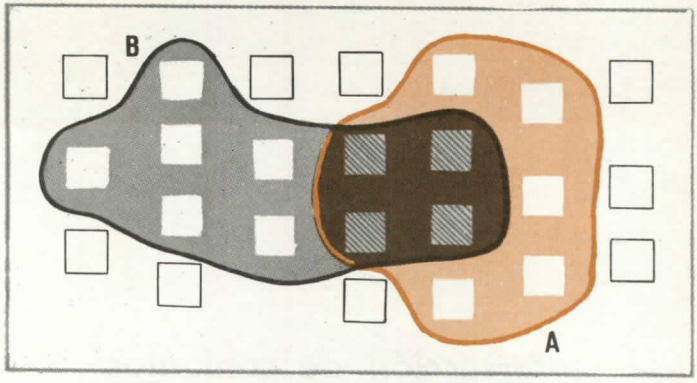
EJEMPLOS. 1. Representa gráficamente mediante diagramas de Venn los conjuntos A y B. ¿Qué recinto representa el conjunto C?

Es el recinto marrón de la figura, o sea, el común a los recintos A y B.



2. Si los conjuntos A y B son disjuntos, ¿cómo es su intersección? Es el conjunto vacío ø.

3. Recorta media cuartilla en trocitos y coloca éstos sobre otra cuartilla. Señala con una línea de lápiz rojo un subconjunto cualquiera A de los trocitos, y con una línea de lápiz ordinario otro subconjunto B. Señala con trazo más grueso el recinto intersección



y raya los papelitos encerrados dentro del mismo, es decir, los elementos del conjunto A ∩ B.

EJERCICIOS

1. Sea A = {a, b, c, d} y B = {g, c, d, h}. Halla A ∩ B.

2. Sea A = {2, 4, 6, 8}, es decir, los múltiplos de 2, y B = {3, 6, 9, 12, ...}, es decir, los múltiplos de 3. ¿Cuál es A ∩ B?

3. Si A es el conjunto de todos los hombres y B el conjunto de todas las personas que miden más de 1'75 m. de altura, ¿qué es A ∩ B?

4. Si C es el conjunto de todas las personas que tienen pelo negro y D el conjunto de todas las mujeres, ¿qué es C ∩ D?

5. Si E = {2, 4, 6, 8, ...} es el conjunto de todos los números pares, y F = {4, 8, 12, 16, ...} es el conjunto de todos los múltiplos de 4, ¿cuál es E ∩ F?

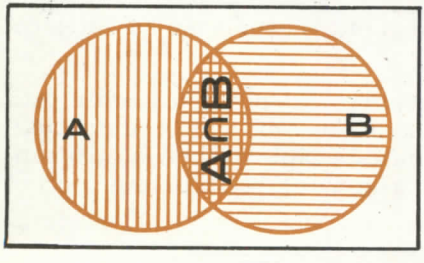
6. Si A = {Juan, Pablo, María, Luisa} y B = {María, Luisa, Rosa, Petra}, halla A ∪ B y A ∩ B.

7. Si A ≡ B, ¿qué son A ∩ B y A ∪ B?

8. Si A ⊂ B, ¿qué son A ∪ B y A ∩ B?

9. Sea A el conjunto de los números pares, B el conjunto de los números impares y C el conjunto de los números dígitos, o sea de una sola cifra. Determina A ∩ C y B ∪ C.

10. Halla la intersección de los conjuntos de letras dados por las palabras ROMA y CARO.



11. Raya verticalmente el conjunto A, y horizontalmente el conjunto B. El conjunto A ∩ B aparece rayado en los dos sentidos, o sea cuadriculado.

12. Sea M = {a, b, c, d} y N = {f, b, d, g}. Halla M ∩ N.

13. ¿Es cierto que

A ∩ B ⊂ A; A ∩ B ⊂ B?

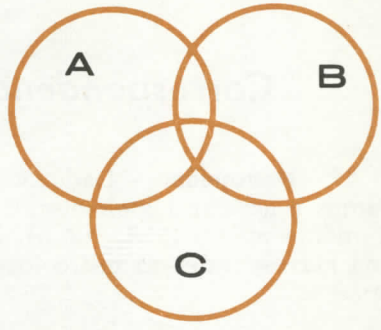
14. Si los conjuntos R y S son disjuntos, ¿cómo es R ∩ S?

15. Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 9\}$ y $C = \{1, 4, 7\}$, *a*) representa por un diagrama de Venn los tres conjuntos; *b*) raya $A \cap B \cap C$.

16. Sean $A = \{$puntos de la recta $R_1\}$ y $B = \{$puntos de la recta $R_2\}$. Halla $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos: *a*) R_1 es paralela a R_2, pero no coincide con ella; *b*) R_1 coincide con R_2; *c*) R_1 y R_2 no son paralelas.

17. Halla $M \cap N$ en los siguientes casos:

a) M y N son disjuntos; *b*) M y N son iguales; *c*) $M \subset N$; *d*) $N \subset M$.



18. En el diagrama de Venn de la figura, raya o colorea:

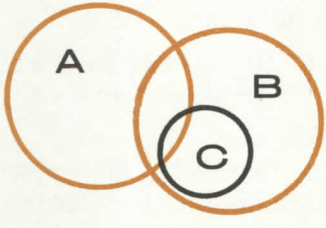
a) $A \cup (B \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup C$

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

19. En el adjunto diagrama de Venn colorea con color distinto cada uno de los siguientes conjuntos:



a) $A \cap (B \cap C)$; *b*) $A \cap (B - C)$, siendo $B - C$ el conjunto de los elementos de B que no pertenecen a C.

20. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Halla: *a*) $A \cap B$; *b*) $A \cap C$; *c*) $B \cap C$; *d*) $B \cap B$; *e*) $(A \cap B) \cap C$; *f*) $A \cap (B \cap C)$.

21. Traza diagramas de Venn para los tres conjuntos no vacíos A, B y C, de modo que A, B y C tengan las siguientes propiedades: *a*) $A \subset C$, $C \subset B$, $A \cap C = \emptyset$; *b*) $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \emptyset$; *c*) $A \subset C$, $A \neq C$, $B \cap C = \emptyset$.

6

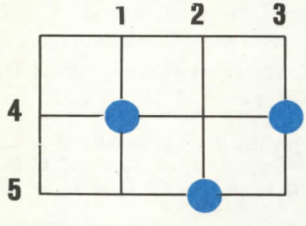
Correspondencias entre conjuntos

19. Definición. — Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {4, 5}, vamos a asociar los elementos del primero con los del segundo, del siguiente modo: (1, 4), (2, 5), (3, 4). Decimos que hemos establecido una **correspondencia** entre los dos conjuntos, lo que suele representarse así:

$$1 \longrightarrow 4$$
$$2 \longrightarrow 5$$
$$3 \longrightarrow 4$$

La correspondencia se representa por una flecha.

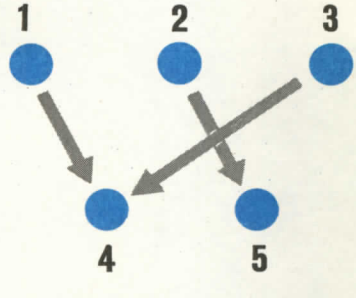
Al A se le llama conjunto *original*, y al B, conjunto *imagen*. Los elementos de B se llaman *homólogos* o *correspondientes* de los de A.



EJEMPLOS. 1. Representa gráficamente la correspondencia anterior, señalando con puntos gruesos los nudos de la red, como se indica en la figura.

El homólogo del 1 es el 4; el homólogo o correspondiente del 2 es el 5, y el del 3 es el 4.

2. Ensaya otras formas de representar la correspondencia anterior, por ejemplo la que se indica en la figura adjunta.



3. En la correspondencia anterior a cada elemento de A, ¿cuántos elementos le corresponden en B?

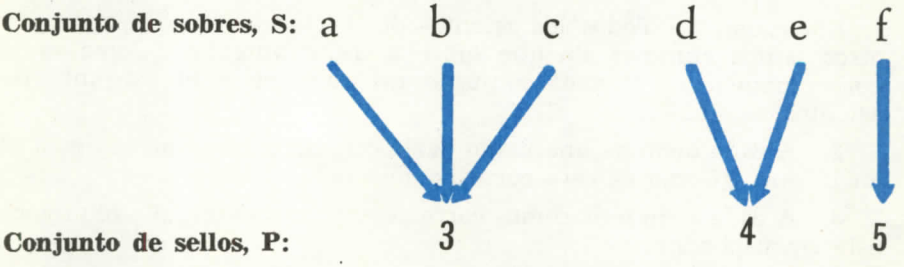
Cuando a cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B, la correspondencia se llama **unívoca.**

4. A seis sobres hay que ponerles los sellos. Designamos a los sobres por a, b, c, d, e, f, y sus pesos vienen dados en la siguiente tabla

Sobres	a	b	c	d	e	f
Pesos (g)	28	40	45	80	90	110
Sellos (pts)	3	3	3	4	4	5

ya que para las cartas: cada 25 gramos, 1'50 pts. Pasando de 100 gramos, cada 25 gramos, 1 pta.

Hallemos la relación entre el conjunto de sobres que designamos por S y el conjunto de sellos que designamos por P.



Vemos que *todo* elemento de S tiene asignado un elemento particular de P, esto es, *cada elemento* de S está conectado por *una y sólo una flecha* a un elemento particular de P. Por tanto, se trata de una correspondencia *unívoca* entre el conjunto S, original, y el conjunto P, imagen.

20. Correspondencia inversa. — En el ejemplo primero hagamos corresponder a cada elemento de B el elemento o elementos de A que forman par con él en la anterior correspondencia, o sea

$$4 \longrightarrow 1$$
$$5 \longrightarrow 2$$
$$4 \longrightarrow 3$$

Representa gráficamente, por los dos métodos explicados en el número anterior, esta correspondencia, que denominamos *correspondencia inversa* de la anterior. ¿Es unívoca dicha correspondencia? No, porque al 4 le corresponden dos elementos, el 1 y el 3.

Ejemplos. 1. Sea A el conjunto de los días del año y B el conjunto de los colores negro y rojo, con que dichos días aparecen escritos en el calendario. Hagamos corresponder a cada día el color con que está escrito. ¿Es unívoca esta correspondencia? Sí, porque a cada día corresponde un solo color.

¿Es unívoca su correspondencia inversa? No, porque a cada color corresponden muchos días.

2. Sea A el conjunto de los libros que tienen los alumnos de esta clase, y B el conjunto de dichos alumnos. Hagamos corresponder a cada libro su dueño. ¿Es unívoca esta correspondencia? Cada libro tiene *un solo* dueño.

¿Es unívoca la correspondencia inversa? Cada alumno tiene *varios* libros.

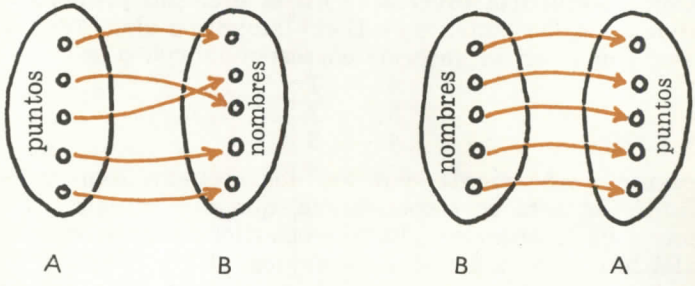
21. Correspondencias biunívocas o biyectivas. — Cuando una correspondencia es unívoca y su inversa también lo es, se dice que ambas son **biunívocas.** Son dos veces unívocas.

EJEMPLOS. 1. Todos los asientos de la clase están ocupados por otros tantos alumnos sin que sobre ni falte ninguno. ¿Cómo es la correspondencia entre el conjunto de alumnos y el conjunto de asientos?

2. A cada dedo de una mano hazle corresponder el homólogo a él en la otra. ¿Cómo es esta correspondencia?

3. A cada niño le hacemos corresponder su cabeza. ¿Es biunívoca esta correspondencia?

4. En la clase de Geografía hay un gran mapa de España que señala con puntos todas las capitales de provincia. Los alumnos deben asignar los nombres de dichas ciudades a los puntos del mapa. Tienen que establecer una correspondencia entre el conjunto A de puntos del mapa y el conjunto B de nombres de las ciudades. ¿De qué clase es esta correspondencia?



Observamos que la correspondencia directa es unívoca, pero también lo es la correspondencia inversa. Luego se trata de una correspondencia **biunívoca:** en ella *a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del B, y a cada elemento del conjunto B le corresponde un solo elemento del A.*

EJERCICIOS

1. Considera la correspondencia entre los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {7, 8, 9}, definida por los pares (1, 7), (2, 8), (3, 9). ¿Cómo es esta correspondencia? Represéntala gráficamente por los dos métodos.

2. En el juego de barcos, ¿qué cañonazos tiene que dispararte tu compañero para hundirte todos los barcos? Considera el subconjunto C' de estos cañonazos como definiendo una correspondencia entre los conjuntos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} y {A, B, C, D, E, F, H, I, J}. ¿Es unívoca dicha correspondencia? Represéntala por los dos métodos.

3. En el presente trimestre Luisa ha obtenido las siguientes notas de Matemáticas: 7, 5, 4, 9, 6, 8, 7. Establece una correspondencia entre las siete semanas del presente trimestre y la correspondiente nota de Matemáticas que en esa semana obtuvo Luisa.

Di cómo es esta correspondencia y su inversa. Haz la representación gráfica.

4. Tres luchadores de esgrima pelean contra otros tres. ¿Qué clase de correspondencia establecerás entre ellos?

5. A cada tecla de la máquina de escribir le hacemos corresponder las letras o signos que aparecen escritos en ella. ¿Cómo es esta correspondencia? ¿Y su inversa?

6. A cada alumno de esta clase le hacemos corresponder su padre. ¿Es unívoca dicha correspondencia? ¿Y cómo es la correspondencia inversa?

7. Sea P el conjunto de los nombres de los alumnos de tu clase y Q el conjunto de los números de 1 a 50 del Registro de clase. Haz corresponder a cada nombre el número que le corresponde en dicho Registro. ¿Cómo es esta correspondencia, si en la clase hay 42 alumnos? ¿Y si hay 50 alumnos?

8. Traza un ángulo de 50° cuyos lados OX y OY midan 12 cm cada uno, y divide cada lado en 12 partes iguales. Partiendo de O, numera los puntos

de división 1, 2, 3, 4..., 12. Efectúa la correspondencia del conjunto de puntos de OX con los de OY mediante la siguiente regla: $1 \rightarrow 12$, $2 \rightarrow 11$, $3 \rightarrow 10$, $4 \rightarrow 9$, ..., uniendo pares de puntos correspondientes mediante segmentos.

¿Qué clase de correspondencia es la indicada?

9. $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Poniendo los elementos de cada conjunto en columnas paralelas haz ver las siguientes aplicaciones de S a T:

(1) $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 4$, $c \rightarrow 2$
(2) $a \rightarrow 2$, $b \rightarrow 2$, $c \rightarrow 3$

Traza los grafos de las mismas, e indica qué clase de correspondencia es cada una de ellas.

10. Una relación f es tal que $a \rightarrow 3$, $b \rightarrow 2$, $b \rightarrow 4$, y $c \rightarrow 1$, donde $C = \{a, b, c\}$ y $T = \{1, 2, 3, 4\}$.

Explica por qué f no es una correspondencia unívoca de C a T.

11. $C = \{1, 2, 3, 4\}$ y $D = \{8, 9\}$. Aplica cada número impar de C al 8 de D y cada número par de C al 9 de D. Construye un diagrama de esta correspondencia.

12. Hagamos la correspondencia del conjunto A = {Andrés, Pedro, Luis, Manolo} al conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ formado por los cuatro asientos de un Seat 600. ¿De qué clase de correspondencia se trata, haciendo corresponder a cada viajero el asiento que ocupa?

13. Hagamos corresponder a cada viajero del conjunto A = {José, Pedro, Luis} el asiento que ocupa entre los del conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ de asientos de un Seat 600. Haz una gráfica y di cómo es dicha correspondencia.

14. Hagamos corresponder a cada número natural n, el número natural $n + 2$, o sea $n \rightarrow n + 2$. ¿Cuáles son los homólogos de los números 8, 12, 27, 54 y 96, en dicha correspondencia?

15. Haz una tabla para la aplicación $n \rightarrow n + 1$ del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ al conjunto de los números naturales. Traza un grafo para este conjunto de pares ordenados de números.

16. Haz tablas para las aplicaciones $n \rightarrow 2\,n$, $n \rightarrow 3\,n$, $n \rightarrow 4\,n$ del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ al conjunto de los números naturales.

Usando la misma escala para cada una, traza los grafos de estas correspondencias.

17. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados expresan una correspondencia unívoca?:

a) $\{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 6), (4, 7)\}$
b) $\{(4, 2), (4, 3), (9, 5), (9, 7)\}$
c) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 7), (4, 6)\}$
d) $\{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 6), (7, 8)\}$
e) $\{(0, 1), (1, 3), (4, 0), (4, 2), (2, 5)\}$

Entendemos que a cada elemento le corresponde el que forma par con él.

7

El número natural

22. Conjuntos coordinables. — Dos conjuntos A y B son **coordinables** cuando se pueden *poner en correspondencia biunívoca.*

Si dos conjuntos A y B son coordinables, decimos que ambos tienen el mismo **número** de elementos.

EJEMPLOS. 1. Los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {x, y}, ¿son coordinables? ¿Tienen el mismo número de elementos? No.

2. El conjunto de alumnos de la clase y el de sus narices, ¿son coordinables? ¿Son el mismo número? Sí.

3. En una carrera ciclista el número de corredores ¿es igual al de bicicletas que corren? ¿Necesitas contar ambos conjuntos para contestar? Los dos conjuntos son coordinables, luego tienen el mismo número de elementos

23. Número cardinal de un conjunto. — Al número de elementos de un conjunto A le llamamos **número cardinal** de dicho conjunto y lo representamos por

$$\text{card (A)}$$

La idea de número es un concepto abstracto que nuestra mente elabora para distinguir los conjuntos coordinables de los que no lo son, y clasificar así todos los conjuntos que encontramos en la vida corriente.

Todos los conjuntos coordinables entre sí tienen el mismo número cardinal.

Número es lo que tienen de común todos los conjuntos coordinables entre sí.

EJEMPLOS. 1. ¿Cuál es card (B), si B = {x, y, z, u, v}?

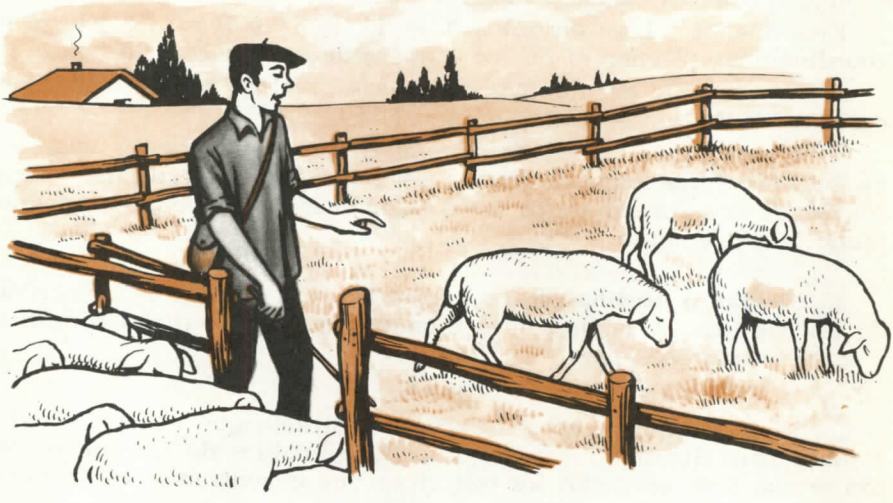
2. ¿Sabrías encontrar en la Naturaleza un conjunto de cinco elementos? Cita varios.

En cambio nunca encontrarás en la Naturaleza el número 5, el cual es un concepto que no existe más que en nuestra mente, por lo que decimos que es abstracto.

3. ¿Es lo mismo el concepto de número que el símbolo con que se le representa? ¿Cómo se representa el número *cinco* en cifras arábigas? ¿Y en cifras romanas? No confundas, por tanto, el concepto de número con el símbolo que lo representa, el cual puede variar.

4. Enuncia la serie de los números cardinales, la cual has aprendido desde pequeño: 1, 2, 3, 4, 5, 6...

24. La operación de contar. — Vemos en el grabado un rebaño de ovejas entrando en el redil. El pastor cuenta las ovejas a medida que van entrando. Se fija en una oveja y dice: «*una*»; mira a la siguiente y dice: «*dos*»; se fija en la siguiente y dice: «*tres*», y así sucesivamente hasta llegar a la última. Si al llegar a esta última ha dicho «*veintiocho*», podemos asegurar que «hay 28 ovejas».



En realidad el pastor no hace más que poner el conjunto de las ovejas en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números 1, 2, 3, ..., 28. De suerte que ambos conjuntos son coordinables.

Contar un conjunto es ponerlo en correspondencia biunívoca con una parte del conjunto de los mismos cardinales.

Ejemplos. 1. Parte una cuartilla en trozos y cuenta el número de trozos que has obtenido. Observa que al contar formas parejas

(□ , 1), (□ , 2), (□ , 3), (□ , 4), (□ , 5), ...

con un trozo de papel y un número. Solamente que tú no escribes el número, sino que lo nombras.

2. Cuenta dos conjuntos A y B de bolas o canicas, que tengan el mismo número de elementos. ¿Puedes poner estos dos conjuntos en correspondencia biunívoca?

25. Conjuntos ordenados. — Corta una cuartilla en trozos y llama A el conjunto de los mismos. Coloca dichos trozos en fila, uno detrás de otro. Al que está más a izquierda le llamas **primero,** al que está a derecha de él le llamas **segundo**; al siguiente, **tercero**, y así sucesivamente. El que está a la derecha de todos se llama **último.**

Decimos que el conjunto A está **ordenado**. En un conjunto ordenado, si consideramos dos elementos *a* y *b*, en seguida sabemos si *a* **precede** o es **anterior** al *b*, lo que se escribe

$$a < b$$

o si *a* **sigue** o es **posterior** al *b*, lo que se escribe

$$b < a$$

EJEMPLOS. 1. Ordena los meses del año en su orden de sucesión natural. ¿Cuál es el primero y cuál el último? Escribe que mayo es anterior a octubre.

2. Ordena los días de la semana empezando por el lunes. ¿Cuál es, entonces, el último?

3. ¿Está ordenado el conjunto de los números 1, 2, 3, 4, 5...? Escribe que el 4 es **anterior** o **menor** que el 8. Dados dos números cualesquiera, ¿puedes asegurar cuál es anterior al otro?

26. Número ordinal de un elemento. — En el papelito primero del conjunto A del párrafo anterior pon el número 1; en el segundo, el 2; en el tercero, el 3, y así sucesivamente.

Lo mismo podemos hacer en un conjunto ordenado cualquiera, aunque no escribamos el número en cada elemento. Simplemente a cada uno de los elementos le atribuimos el correspondiente número de la serie 1, 2, 3, 4, 5...

Al número correspondiente a un elemento le llamamos **número ordinal del elemento** en cuestión.

EJEMPLOS. 1. ¿Cuál es el ordinal del martes en el conjunto ordenado de los días de la semana?

2. ¿Cuál es el ordinal del mes de octubre en el conjunto ordenado de los meses del año?

3. *Ordena* un conjunto de bolas, o sea forma parejas entre ellas y la serie natural de los números de modo que estén en correspondencia biunívoca, y que si en un par aparece un número, en otros pares aparezcan todos los números que le preceden. Aquí, a diferencia

de lo que ocurría en la operación de contar, es esencial la forma de efectuar los apareamientos. A cada posible apareamiento le corresponde una ordenación del conjunto.

27. Propiedades de la ordenación de los números ordinales. — Entre todos los números que siguen al número 8, ¿cuál es el menor? Se dice que el 9 **sigue inmediatamente** al número 8.

Entre todos los números que preceden al número 8, ¿cuál es el mayor? Se dice que el 7 **precede inmediatamente** al 8.

Luego a todo número le sigue inmediatamente otro; y a todo número le precede inmediatamente otro excepto al primero, o sea al 1.

No existe ningún número comprendido entre dos números que se siguen inmediatamente.

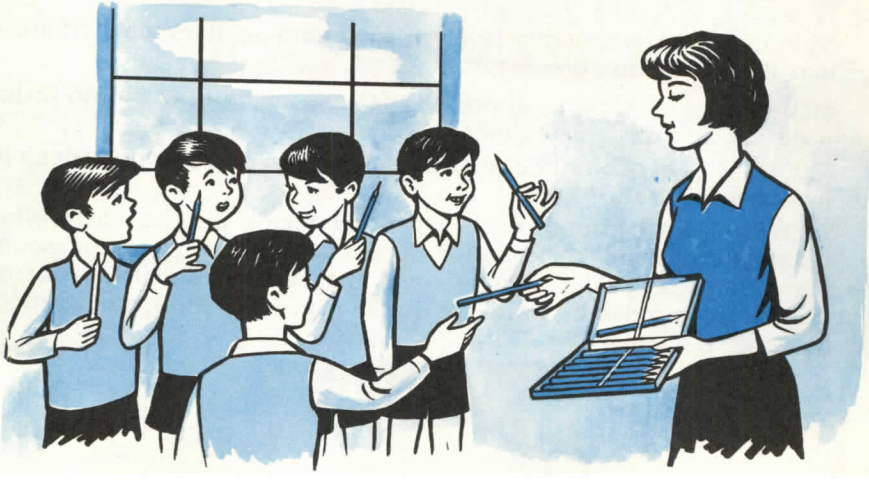
28. Los números naturales. — El número natural surge al fusionar dos conceptos: el número cardinal y el número ordinal. Así, 3 lo mismo puede significar que hay tres naranjas en un cesto, o que cierto individuo es el tercero de una lista.

La identificación de los dos conceptos se funda en el siguiente hecho experimental: *el número cardinal de un conjunto coincide con el número ordinal del último elemento,* y esto en cualquier forma y orden en que se haga el recuento.

Resulta, pues, que el número **natural** puede emplearse para contar, y entonces se llama **cardinal**, o para ordenar, y entonces se llama **ordinal**.

La serie de los números naturales es *ilimitada*, porque dado un número cualquiera, siempre se puede añadir una unidad a este número, y se obtiene el número siguiente.

29. Miembros de una igualdad. — La profesora tiene 12 lápices de colores y reparte uno a cada uno de los cinco alumnos, quedándole 7 lápices.



Podemos escribir que el número de lápices que tenía es igual al de los que ha repartido más el de los que le quedan.

El signo de *igualdad* es = (se lee igual); o sea

$$12 = 5 + 7$$

La expresión así obtenida se llama *igualdad.* El número que precede al signo = es el *primer miembro*; el que le sigue es el *segundo miembro.*

Las mismas denominaciones se emplean en las *desigualdades,* por ejemplo en la siguiente

$$5 < 12$$

EJERCICIOS

1. Escribe de menor a mayor, indicándolo por el signo de desigualdad, los siguientes números: 308, 221, 593, 30, 87, 128 y 1081.

2. En una clase hay 32 alumnas. ¿Son más niñas que las letras del alfabeto? ¿Podemos asegurar que habrá varias cuyos nombres comiencen con la misma letra?

3. ¿Cuáles son los cardinales de los conjuntos siguientes: A = {a, b, c}, B = {Luis, Juan}, D = {2, 5, 8, 14} y E = {José, d, 7}?

4. Representa el conjunto de los números naturales en diagrama lineal por los puntos de una recta.

5. El conjunto de los alumnos presentes un día en la clase y el conjunto de las tareas de Matemáticas entregadas en el mismo día al profesor ¿son coordinables?

6. ¿Son coordinables el conjunto de los días de la semana y el conjunto de las notas de la escala musical?

7. Busca en la clase ejemplos cuyo cardinal es 4 y otros cuyo cardinal es 5.

8. Si designamos por *a* al cardinal del conjunto de los ojos de un perro, por *b* el de sus patas y por *c* el de sus orejas, escribe con estos tres números una igualdad y dos desigualdades.

9. ¿Cómo ordenarías los asientos de la clase? ¿Qué regla seguirías?

10. Ordena a los alumnos de tu clase por orden alfabético, o según las notas obtenidas en la última semana.

11. Halla el cardinal del conjunto Q de los días del año 1968, y del conjunto R de las letras del alfabeto castellano.

12. Si al contar el número de trozos de una cuartilla nombras el número 5, ¿has nombrado anteriormente el 1, 2, 3 y 4?

13. Si después de contar los trozos en que has partido una cuartilla los mezclas de otro modo y vuelves a contarlos, ¿obtendrás el mismo número cardinal?

8

Sistemas de numeración

30. Sistema de numeración. — Ya que la serie natural de los números es ilimitada, es necesario idear un sistema de reglas que permita nombrar y representar los números con pocas palabras y signos diferentes. Este sistema de reglas se llama *sistema de numeración.*

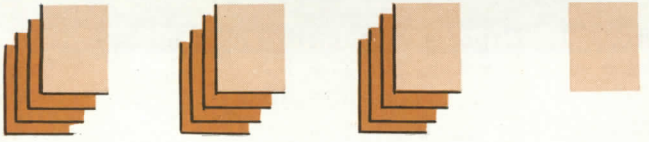
Vamos a analizar y estudiar con algún detalle estas reglas, para que veas la sencillez de las mismas y las grandes ventajas que nos reportan.

31. Sistema de numeración de base dos. — Toma una cuartilla y pártela en 16 trozos; de éstos rompe 3 y tíralos. Los restantes forman un conjunto de 13 papelitos, que vamos a contar en el sistema de base dos. Para ello agrúpalos de dos en dos hasta que no sea posible agrupar más. ¿Cuántos papelitos te han sobrado? ¿Te pueden sobrar dos o más? ¿Cuántos te pueden sobrar?

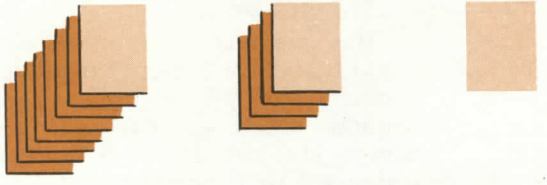
A los conjuntos de dos trozos les llamamos **unidades de segundo orden,** siendo los trozos sueltos las **unidades de primer orden.**

Agrupa ahora las unidades de segundo orden de dos en dos hasta que no se pueda más. ¿Cuántas unidades de segundo orden sobran? ¿Podían haber sobrado más de dos?

A los conjuntos de dos unidades de segundo orden les llamamos **unidades de tercer orden.**



Agrupemos en seguida las unidades de tercer orden de dos en dos tanto como sea posible.



A cada grupo de dos unidades de tercer orden le llamamos unidad de **cuarto orden,** y así sucesivamente.

En un cuadro como el que sigue escribe las unidades de los distintos órdenes que han ido sobrando. Si de algún orden de unidades no ha sobrado ninguna unidad, debes poner un cero en su lugar correspondiente.

1	1	0	1
4.° orden	3er orden	2.° orden	1er orden

Suprime el recuadro y los nombres de las unidades y queda la expresión

1 1 0 1

como representación del número de trozos de papel que tenemos en el sistema de base dos. Has de recordar que la primera cifra de la derecha representa las unidades de 1er orden, la segunda cifra las de 2.° orden, etc. El procedimiento seguido se denomina **sistema de numeración de base dos** o **binario,** ya que *cada unidad de un orden contiene dos unidades del orden inferior.*

Por consiguiente, el *sistema de numeración binario* usa sólo las cifras 0 y 1. Así como en el sistema de base 10 no hay símbolo para 10, así en la base 2 no hay símbolo para 2.

El sistema binario es el empleado en los *cerebros electrónicos,* cuya velocidad de cálculo es enorme. El cero consiste en abrirse el circuito, con lo que la corriente no pasa, y el 1 consiste en cerrarse el circuito, con lo que la corriente pasa.

El número 1.101 en base 2 se expresa así:

$1\ 1\ 0\ 1_{(2}$

EJEMPLOS. 1. Expresa el número $1101_{(2}$ en la base 10. Será:

$$1101_{(2} = 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 1 + 0 + 4 + 8 = 13_{(10}$$

Son 13 papelitos, según ya sabíamos.

2. Escribe el número $10100_{(2}$ en la base 10. Será:

$$10100_{(2} = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 0 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 + 16 = 20_{(10}$$

3. Expresa el número $23_{(10}$ en base 2.

23	| 2			
03	11	| 2		
1	1	5	| 2	
		1	2	| 2
			0	1

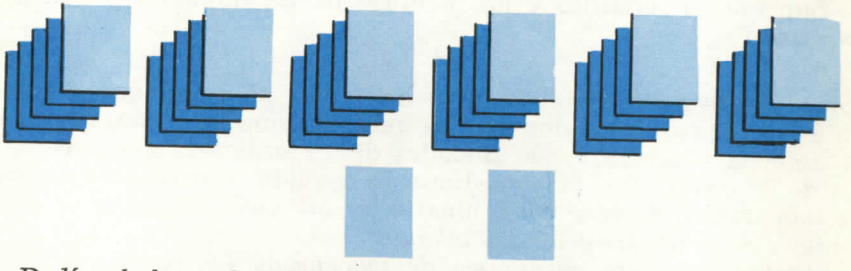
Hay que hacer montoncitos de 2 en 2, o sea, dividir 23 entre 2. Son 11 unidades de segundo orden y 1 de primer orden. Las unidades de segundo orden se agrupan de 2 en 2, o sea, se divide 11 entre 2: son 5 unidades de tercer orden y 1 de segundo orden. Se prosigue del mismo modo.

$$23_{(10} = 10111_{(2}$$

32. Sistema de numeración de base cinco. — En vez de unir de dos en dos las unidades de un orden para formar las de orden superior, vamos a unirlas de cinco en cinco.

Entonces obtenemos el **sistema de numeración de base cinco.**

EJEMPLOS. 1. Toma una cuartilla de papel y divídela en 32 trozos. Junta éstos de cinco en cinco, hasta que no se pueda más. ¿Cuántos papelitos han sobrado?



¿Podían haber sobrado más de cinco papelitos?

2. Agrupa ahora las unidades de segundo orden de cinco en cinco. Resulta una unidad de tercer orden y sobra una unidad de segundo orden y dos de primer orden.

3. Indica este resultado en el cuadro adjunto:

1	1	2
3er orden	2.º orden	1er orden

o simplemente escribirás la expresión

1 1 2

como representación del número de papelitos en el sistema de base 5. Sabiendo siempre que la primera cifra de derecha representa unidades de primer orden, la segunda unidades de 2.º orden, etc.

4. ¿Cuáles son las **cifras** o símbolos de los números naturales que pueden aparecer en el sistema descrito de base cinco? ¿Puede aparecer un 5, o cifra superior a ésta?

5. Cuando no sobre ninguna unidad de un orden determinado, ¿qué pondrás en el lugar correspondiente?

6. Escribe el número $342_{(5}$ en la base 10. Ahora cada unidad de un orden contiene 5 unidades del orden inferior. Por tanto,

$$342_{(5} = 2 + 4 \times 5 + 3 \times 5 \times 5 = 2 + 20 + 75 = 97_{(10}$$

Expresa el número $82_{(10}$ en la base 5.

82	| 5	
32	16	| 5
2	1	3

Hay que hacer montoncitos de 5 en 5, o sea, dividir 82 entre 5; son 16 unidades de segundo orden y 2 sobrantes de primero.

Las unidades de segundo orden se juntan de nuevo de 5 en 5, o sea, se divide 16 en 5, dando 3 unidades de tercer orden y 1 de segundo:

$$82_{(10} = 312_{(5}$$

33. Sistema de numeración de base diez. — Es de gran importancia, porque es el que utilizamos corrientemente. Esto se debe a que son diez los dedos de las manos y a que los hombres primitivos se servían de los mismos para contar los conjuntos: rebaños, bosques, frutas, etc.

Ahora las unidades de un orden se agrupan de diez en diez para formar el orden inmediato superior. Las unidades de 2.º orden se llaman también **decenas;** las de 3er orden, **centenas;** las de 4.º, **millares,** etc.

EJEMPLOS. 1. Tratamos de contar el dinero recogido en una colecta.

Las monedas de peseta las agrupamos en montones de *10 monedas.* Cada montón se llama *decena* o *unidad de segundo orden.*

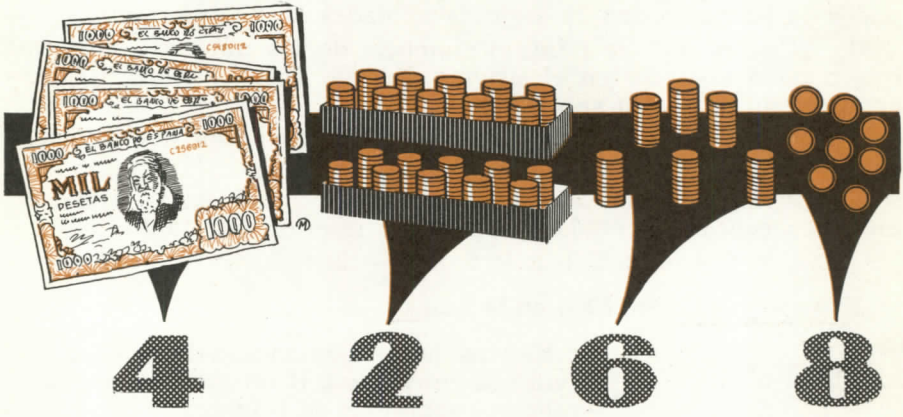
Las monedas sueltas sobrantes son *unidades simples* o *de primer orden.*

Cada diez montones o decenas se agrupan metiéndolas en una caja. Cada caja se llama *centena* o *unidad de tercer orden.*

Un grupo de diez cajas o centenas se llama *mil* o *unidad de cuarto orden.*

Supongamos que hemos recogido 4 billetes de mil, 2 cajas o centenas, 6 montones o decenas y 8 monedas o unidades. Tenemos: 4 miles, 2 centenas, 6 decenas y 8 unidades; o más sencillamente:

4268 pesetas



2. ¿Cuántas cifras se utilizan en el sistema de base 10?

Cada cifra tiene un valor diferente según el lugar que ocupa, a lo que se llama *valor relativo* de la cifra.

34. Clases y períodos de unidades. — Para no crear un nombre especial para cada orden se agrupan los órdenes de tres en tres, formando las *clases,* y éstas se agrupan de dos en dos, formando los *períodos.*

Los tres primeros órdenes forman la clase de las unidades; los tres siguientes, la clase de los miles; luego vienen la clase de los millones, la clase de los miles de millón, la clase de los billones...

CUADRO DE LOS ÓRDENES, CLASES Y PERÍODOS

Período de las UNIDADES	Clase de las *unidades*	unidades simples	primer	orden
		decenas	segundo	—
		centenas	tercer	—
	Clase de los *miles.*	unidades de mil	cuarto	orden
		decenas de mil	quinto	—
		centenas de mil	sexto	—
Período de los MILLONES	Clase de los *millones*	unidades de millón	séptimo	orden
		decenas de millón	octavo	—
		centenas de millón	noveno	—
	Clase de los *miles de millón*	unidades de mil de millón	décimo	orden
		decenas de mil de millón	undécimo	—
		centenas de mil de millón	duodécimo	—

(Sigue el período de los *billones.*)

35. Cómo escribir un número. — Si un número se compone de 5 unidades de sexto orden, 3 de cuarto orden, 1 de tercer orden y 8 de primer orden, se escribirá:

5 centenas de mil, 0 decenas de mil, 3 miles,
1 centena, 0 decenas y 8 unidades

y abreviadamente: 503 108

Prácticamente se suprime el nombre de los órdenes o de las clases, lo que conduce a los convenios siguientes:

36. Convenios de la numeración escrita. — 1.° *Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades de orden inmediatamente superior.*

2.° *La primera cifra de la derecha representa unidades simples.*

3.° *La cifra cero ocupa el lugar de los órdenes que faltan.*

37. Cómo leer un número. — Cuando un número es muy grande, se facilita la lectura separando las clases por un punto, y luego se lee separadamente cada una de ellas, dándole su propio nombre.

EJEMPLO: 5237809 se lee:

cinco millones, doscientos treinta y siete mil, ochocientos nueve.

38. Valor absoluto y relativo de una cifra. — Toda cifra significativa tiene dos valores:

Valor absoluto de una cifra es el número de unidades simples que indica su figura.

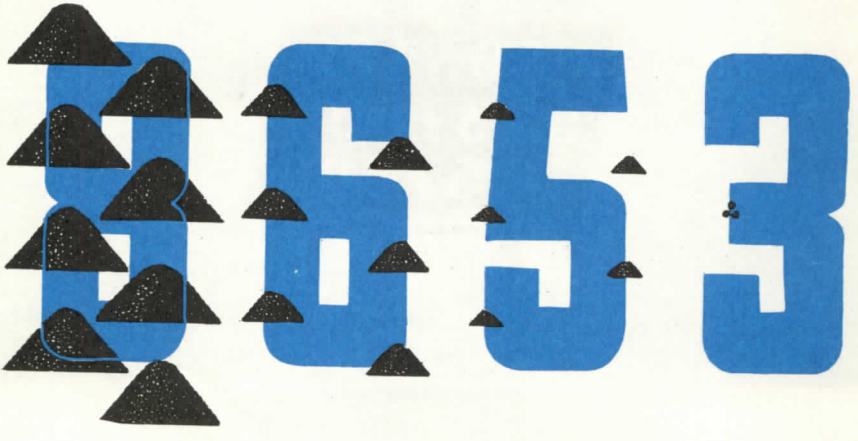
Valor relativo de una cifra es el que le corresponde por el lugar que ocupa en el número.

Así, en el número 57608, el valor absoluto del 6 es seis unidades simples; su valor relativo es seis centenas o 600.

39. Descomposición polinómica de un número. — Según lo que precede, podemos decir:

Todo número es la suma de los valores relativos de sus cifras.

Así, si hemos contado los perdigones contenidos en una caja y hemos obtenido 8653, vemos que este número se ha formado reuniendo 8 montones de mil perdigones (8000 perdigones), 6 montones de cien perdigones (600 perdigones), 5 montones de 10 perdigones (50 perdigones) y 3 perdigones.



Se puede, pues, decir que 8653 es la suma de los números 8000, 600, 50 y 3, y escribiremos:

$$8653 = 8000 + 600 + 50 + 3.$$

CÁLCULO MENTAL

- **Cuenta**

de	10	en 10	desde	200	hasta 400.
de	20	en 20	desde	800	hasta 1000.
de	15	en 15	desde	2000	hasta 2500.
de	50	en 50	desde	5000	hasta 6000.
de	2	en 2	desde	10000	hasta 10100.
de	3	en 3	desde	15000	hasta 15100.

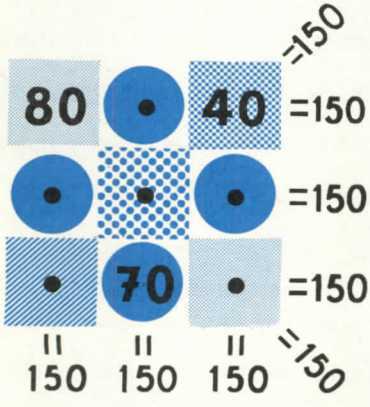
- **¿Cuánto me falta** para completar la docena si tengo: 8 lápices; 3 lápices; 10 lápices; 5 lápices; 9 lápices; 6 lápices?
- **¿Cuántos huevos son:** docena y media de huevos; dos docenas y media; 5 docenas?
- **Sustituye** el punto por el número conveniente:

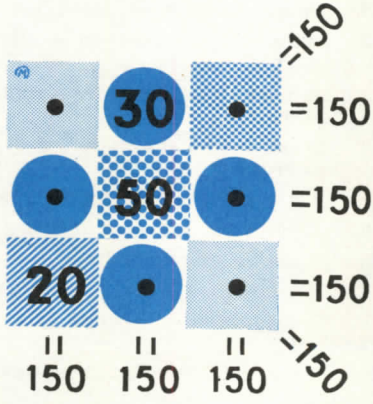
$300 + . = 1000$	$5000 + 6000 - . = 4000$
$2000 - . = 1200$	$100 + 600 - . = 500$
$1200 + . = 2500$	$1000 - 500 + . = 2000$

- **Haz la descomposición** polinómica (por oral) de los números: 4265, 896, 1637, 11715, 18027, 9141, 728, 4837.

EJEMPLO: $8254 = 8000 + 200 + 50 + 4.$

- **Coloca** los números que convengan en el lugar de los puntos, para que sumando te dé: ¡Ciento cincuenta por todas partes!





EJERCICIOS

1. Lee los números 86048670, 603908019, 790503209467, 9001861730050.

2. Escribe los números: trece millones cuatro mil cuatro; tres millones dos; ciento siete mil treinta y siete; doscientos cuatro millones treinta y dos mil setenta.

3. Escribe con cifras romanas los números 149, 251, 579, 709, 1495, 3777, 1492, 1952, 604, 75, 39.

4. Se escriben los 238 primeros números. ¿Cuántas veces se escribe la cifra 9? ¿Y cuántas la cifra 0?

5. ¿Cuántas decenas, centenas, unidades de mil, son necesarias para formar un millón, una decena de mil de millón, 35 millones?

6. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es 7; se coloca un cero entre las dos cifras de este número. ¿En cuánto aumenta su valor?

7. Se intercalan dos ceros entre las cifras 5 y 6 del 562. ¿En cuánto aumenta su valor?

8. ¿Cuántos números hay de cuatro cifras?

9. Escribe y lee los números formados de: 3 millones, 5 decenas de mil, 2 miles, 3 centenas y 7 unidades; 8 centenas de mil, 5 miles y 9 decenas; 9 miles, 8 centenas y 5 unidades.

10. ¿Cuántos dedos tienen las gallinas en cada pata? Si tuvieran inteligencia, ¿qué sistema de numeración emplearían?

11. ¿Cuántos billetes de 100 pesetas vale un millón de pesetas?

12. ¿Cuánto falta a 25 decenas para tener 3 centenas?

13. Un número tiene 10 cifras. ¿De qué clase será la cifra de las unidades de orden más elevado?

14. En un número cualquiera, ¿qué lugar ocupan: *a*) las decenas; *b*) las unidades de mil; *c*) las centenas de millón?

15. ¿Cuántas centenas vale una unidad de sexto orden?

16. ¿Cuántos billetes de 100 pesetas valen diez billetes de 1.000 pesetas?

17. ¿A qué clase pertenecen las unidades de octavo orden?

18. Entre los números de 4 cifras diferentes, ¿cuál es el mayor? ¿Cuál es el menor?

19. Nombra los diferentes órdenes de: 9, 90, 200, 999, 485, 1234, 5090, 40724, 54024708.

20. Un número tiene 3 (5, 7 ó 9) cifras. ¿Qué orden representa la primera de la izquierda?

21. ¿Cuál es el menor número de 2, 3, 4, 5 cifras?

22. ¿Cuál es el mayor número de 3, 4, 5, 6 cifras?

23. ¿Cuántos números hay de 1, 2, 3 cifras?

24. El número 456789, ¿cuántas centenas, decenas de mil, etc., contiene?

25. Si el guarismo 7 ocupa el 4.º, 6.º, 8.º lugar, ¿cuántas unidades simples vale?

26. Entre los 100 primeros números, ¿cuántos empiezan por 6?, ¿cuántos terminan en 5?

27. ¿Cuántos números de tres cifras tienen el 4 como cifra de decenas?

28. ¿Cuántas decenas tiene una unidad de millar, una centena de millar, una decena de millón?

29. ¿Cuántos millares tiene una centena de millón, una decena de millón, un millar de millón, una unidad de billón, una unidad de millón?

30. ¿Cuál es el orden de la primera cifra de un número entero que tiene 5 cifras, 3 cifras, 6 cifras, 10 cifras, 9 cifras, 12 cifras?

31. ¿Cuántas cifras utilizarías en el sistema de numeración de base 7?

32. En el sistema de numeración de base 5, ¿cómo escribirás el 5? ¿Y el 10?

33. ¿Cuántas unidades simples tiene la unidad de 2.º orden en el sistema de numeración de base 12? ¿Qué es una docena?

34. Los comerciantes llaman *gruesa* a doce docenas. Si se han vendido dos gruesas, 7 docenas y 5 lápices sueltos, ¿cuántos lápices se han vendido?

35. Convierte cada uno de los siguientes números del sistema decimal al sistema binario:

a)	9	*b*)	15	*c*)	18	*d*)	24
e)	27	*f*)	30	*g*)	37	*h*)	100
i)	23	*j*)	39	*k*)	64	*l*)	71

36. Como las arañas tienen 8 patas, al sistema de base 8 se le llama también *sistema de las arañas*. ¿Cuántos días hay en un año de las arañas? Una semana de las arañas, ¿cuántos días son? ¿Cuántas semanas completas hay en un año de las arañas?

37. En un ejército de arañas (8 patas) hay 1000 soldados. Cada 4 soldados han perdido una pata durante la lucha. ¿Cuántas patas tiene ese ejército después del combate?

38. Escribe en base 4 el número decimal 53.

39. Escribe en base 10 el número $231_{(4}$.

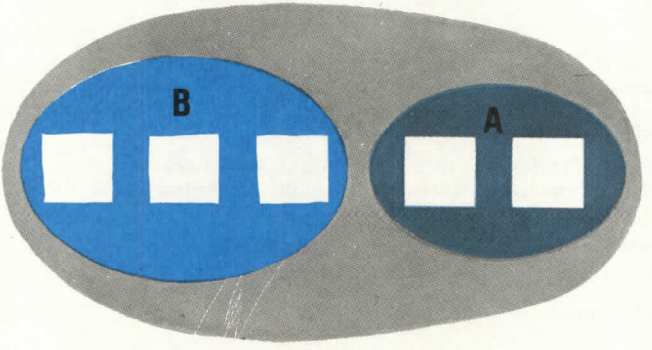
40. Escribe en base 3 el número decimal 37.

9

Adición de números naturales

40. Definición. — Dados dos números naturales, por ejemplo 2 y 3, parte en trozos una cuartilla y toma un conjunto A de trozos cuyo cardinal sea 2 y un conjunto B de trozos cuyo cardinal sea 3.

Reúne ahora los dos conjuntos A y B formando un solo conjunto C = A + B, según vimos en el párrafo 17.



¿Cuál es el cardinal del conjunto C = A + B?

Pues bien, a este cardinal, 5, se le denomina **suma** de 2 y 3, y se representa así:

$$2 + 3 = 5$$

La operación que realizamos al pasar de los números 2 y 3 al número 2 + 3 = 5 la llamamos **adición de números naturales.**

Los números 2 y 3 se llaman **sumandos** y 5 es la **suma** o **total.**

Ejemplos. 1. Dados los números 2 y 3, forma otro conjunto A cuyo cardinal sea 2, distinto del anterior, por ejemplo, el conjunto de dos sellos peruanos; y forma otro conjunto B cuyo cardinal sea 3, por ejemplo el conjunto de tres sellos argentinos. Reúne A + B y halla su cardinal. ¿Obtienes la misma suma de 2 y 3 que anteriormente, o sea 5?

Luego *la suma de dos números naturales es independiente de los conjuntos A y B que elijamos para realizarla.*

2. Analiza los pasos que has de dar para obtener el número 5 a partir del 2 y del 3:

1.º formas el conjunto A.
2.º formas el conjunto B.
3.º reúnes A y B, y obtienes A + B.
4.º hallas el card (A + B).

Estas son las partes de que se compone la operación de *adición de números naturales.* No has de confundir, por tanto, las palabras *adición* y *suma. Adición es la operación, y suma es el resultado de la misma.*

Podíamos resumir en este esquema las cuatro partes de la adición de números naturales

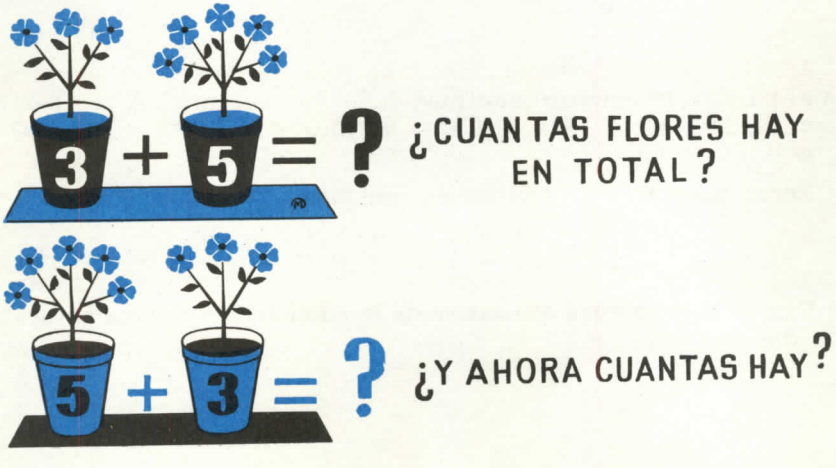
$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & C \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 2 & + & 3 & = & 5 \end{array}$$

41. Propiedad conmutativa de la adición de números naturales. — Vimos en el párrafo 15 que dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$, se verificaba $A + B \equiv B + A$. Luego pasando a los cardinales

$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & \equiv & B + A \\ 3 & + & 2 & = & 2 + 3 \end{array}$$

Esta es la **propiedad conmutativa** de la adición de números cardinales.

EJEMPLOS. 1. Luisa tiene en un balcón un tiesto con 3 flores y otro con 5 flores. En la ventana tiene un florero con 5 flores y otro con 3 flores. ¿Dónde posee mayor número de flores?



Observa que hay igual número de flores en ambos casos:

$$3 + 5 = 5 + 3 = 8$$

El orden de los sumandos no altera el valor de la suma.

Esta es la *propiedad conmutativa* de la adición.

2. En la igualdad

$$8 + \square = 12 + 8$$

¿qué número tendrás que escribir dentro del cuadrado, para que sea cierta?

3. ¿Qué números puedes escribir dentro de los círculos de la siguiente igualdad

$$7 + \bigcirc = \bigcirc + 7$$

para que sea cierta?

4. Escribe números dentro de las figuras de la igualdad:

$$\bigcirc + \square = \square + \bigcirc$$

de modo que sea cierta.

Observarás que en los cuadrados hay que escribir el mismo número, cualquiera que sea, y en los círculos también se puede escribir cualquier número, con tal que sea el mismo en los dos.

5. ¿Qué números representan las letras a y b, en la igualdad

$$a + b = b + a$$

Decimos que la propiedad conmutativa es una propiedad *general*, o sea, que la igualdad anterior se verifica para cualquier valor que se atribuya a las letras.

42. Propiedad asociativa de la adición de números naturales. — En el párrafo 16 demostramos que, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ y $C = \{6, 7, 8, 9\}$, se verificaba que $(A + B) + C \equiv A + (B + C)$.

Luego pasando a los cardinales, tenemos

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4)$$

Esta es la **propiedad asociativa** de la adición de números naturales, que dice:

El orden y forma en que se efectúen las dos operaciones de sumar en la adición de tres números puede ser cualquiera, dando el mismo resultado siempre.

El paréntesis recordarás que es un mandato de prioridad, e indica que la operación encerrada dentro del mismo es la primera que hay que realizar.

EJEMPLOS. 1. El orden en que has de efectuar las siguientes adiciones es:

a) $7 + (4 + 3) = 7 + 7 = 14.$

b) $9 + [(12 + 7) + 5] = 9 + [19 + 5] = 9 + 24 = 33.$

2. Dados los números 8, 7 y 4, aplica las propiedades conmutativa y asociativa a la suma de los mismos, y haz ver diversas formas en que se puede obtener dicha suma. Indica en cada caso qué propiedad has aplicado: la conmutativa o la asociativa. Explica por qué dicha suma puede escribirse simplemente

$$8 + 7 + 4$$

sin necesidad de paréntesis, análogamente a lo explicado en los ejemplos 1 y 2 del número 16.

3. Comprueba la verdad de la igualdad

$$(8 + 7) + 4 = 8 + (7 + 4)$$

En efecto,

$$15 + 4 = 8 + 11 = 19$$

4. ¿Qué número hemos de escribir dentro del cuadrado para que se verifique la igualdad

$$(8 + 7) + 4 = 8 + (\square + 4)?$$

5. ¿Qué números hemos de escribir dentro de cada círculo para que se verifique la igualdad

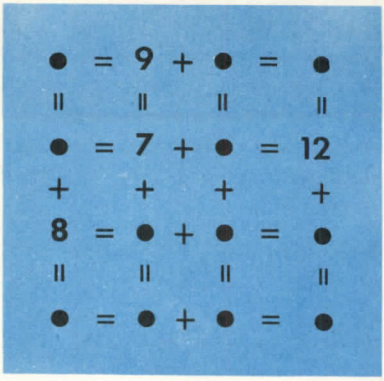
$$(9 + \bigcirc) + 3 = 9 + (\bigcirc + 3)?$$

Escribe varias soluciones. ¿Hay que poner el mismo número en los dos círculos? ¿Se puede poner cualquier número dentro de los mismos?

6. Comprueba que la igualdad

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

es general, o sea que se verifica para cualquier valor que demos a sus letras.



7. Sustituye los puntos por números en la figura adjunta y explica en virtud de qué propiedad aparecen números iguales.

43. Elemento neutro de la adición de números naturales. — Al conjunto vacío lo hemos representado por ø. Y ahora consideramos como cardinal del conjunto vacío el número cero, 0.

Luego si reunimos los objetos de un conjunto C con los del conjunto vacío ø, ¿qué conjunto suma obtenemos? El mismo conjunto C, puesto que no le añadimos ningún elemento.

Si a un número le sumamos el cero, resulta como suma el mismo número.

Por esta propiedad, al número cero se le llama **elemento neutro** de la adición de números naturales.

Esta propiedad se expresa por

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

EJEMPLOS. 1. $5 + 0 = 0 + 5 = 5.$

2. Escribe dentro de los cuadrados el número que corresponde para que se verifique

$$8 + \square = 8 \quad ; \quad \square + 0 = 7$$
$$\square + 0 = \square$$

CÁLCULO MENTAL

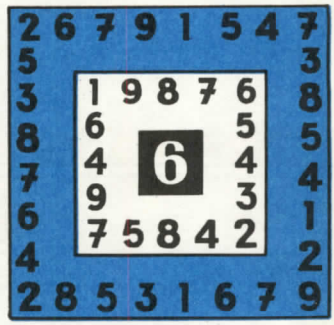
- **Suma** sucesivamente los siguientes números:

$$5 + 7 + 1 + 8 + 4 + 9 + 6 + 5 + 3 + 9 + 7 + 2$$

Cuando termines con el último comienza de nuevo con el primero.

- **Suma,** en el primer cuadro, cada cifra de la fila horizontal con cada una de la columna vertical:

+	13	9	6	7
4				
6				
3				
5				



- **Suma,** en el segundo cuadro, el numero que está en el cuadrado pequeño por todos los que están en los otros dos cuadrados, comenzando por el ángulo superior izquierda.
- **Suma,** en el segundo cuadro, los números de cada cuadrado comenzando por el ángulo superior izquierda y diciendo solamente los resultados. Así: 1, 10, 18, 25...

EJERCICIOS

1. ¿En cuánto aumenta una suma de tres números si se aumenta al primero en 7 decenas, al segundo en 25 centenas y al tercero en 9 millares o miles?

2. ¿Qué nombre podemos dar a perros, gatos y conejos para que sean de la misma especie, y se puedan sumar?

3. Una niña ha escrito en su cuaderno de tareas esta operación:

$$39 + 8 + 2 = 39 + 8 = 47 + 2 = 49$$

¿Está bien expresada? ¿Falta algo?

4. Justifica las igualdades siguientes, diciendo qué propiedades se aplican:

1.ª $83 + 35 = 83 + (17 + 18) = (83 + 17) + 18 = 100 + 18 = 118$
2.ª $43 + 75 = (40 + 3) + (70 + 5) = 110 + 8$
3.ª $17 + 31 + 3 + 9 = 20 + 40.$

5. ¿Qué propiedades se aplican en las igualdades:

$8 + 6 + 5 = 8 + 5 + 6$; $8 + (6 + 5) = (8 + 6) + 5$?

6. ¿Qué propiedades hay que aplicar para poder escribir

$$9 + (6 + 3) = (9 + 6) + 3$$

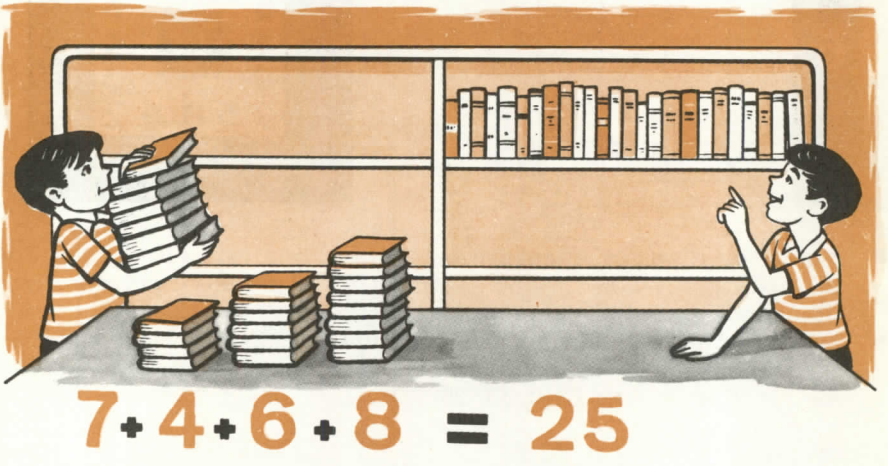
$(9 + 6 + 3) + (2 + 4 + 5) = (9 + 2) + (6 + 4) + (3 + 5)$?

7. Al comenzar las Pascuas de Navidad, Enriqueta tiene 7 libros, y en esas vacaciones su papá le regala 4 libros y su mamá 6. Indica con paréntesis cuántos libros tiene Enriqueta.

Tiene los 7 libros más los que le han dado, o sea,

$$7 + (4 + 6)$$

8. Luis tiene los libros que indica la figura. Explica diversas maneras de hacer la suma $7 + 4 + 6 + 8$, por medio de paréntesis.



9. ¿Está bien escrito que

$$7 + 3 + 6 + 10 = 10 + 6 = 16 + 10 = 26?$$

No pongas nunca el signo igual entre cosas que no sean iguales.

10. Un pastor tiene un rebaño de 74 ovejas y corderos, y otro pastor le vende 7 ovejas y 2 corderos más. Expresa con paréntesis cuántos animales tiene dicho pastor.

11. Alicia sale de casa con 21 pesetas. Se encuentra con sus tíos que le dan: su tío, 5 pesetas, y su tía, 10 pesetas. Indica con paréntesis el dinero que tiene Alicia.

12. ¿Qué propiedades aplicas en las igualdades:

$13 + 5 = (10 + 3) + 5 = 10 + (3 + 5) = 10 + 8 = 18$

$24 + 3 = (20 + \ldots) + 3 = 20 + (\ldots + 3) = 20 + \ldots = \ldots$

$35 + 4 = (30 + 5) + \ldots = 30 + (5 + \ldots) = 30 + \ldots = \ldots$

$42 + 6 = (\ldots + \ldots) + 6 = \ldots + (\ldots + 6) = \ldots + \ldots = \ldots$

$71 + 5 = (\ldots + \ldots) + \ldots = \ldots + (\ldots + \ldots) = \ldots + \ldots = \ldots$

10

Práctica de la adición de números naturales

44. Primer caso: adición de dos números que tengan una sola cifra cada uno. — Seguramente sabes sumar; pero es importante que te des cuenta de que al sumar como acostumbras, no haces más que aplicar las propiedades de la adición demostradas en la lección anterior.

Para sumar dos números de una sola cifra, basta conocer la **tabla pitagórica** de la adición, que debes saber construir:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Así: $6 + 8 = 14$ (sigue las flechas).

45. Segundo caso: adición de dos números de los cuales uno solo tiene una cifra. — Efectúa la adición $65 + 4$.

Se tiene, en virtud de la propiedad asociativa,

$$65 + 4 = (60 + 5) + 4 = 60 + (5 + 4) = 60 + 9 = 69$$

o sea,

$$\begin{array}{r} 65 \\ +\,4 \\ \hline 69 \end{array}$$

SUMANDOS

SUMA o TOTAL

Efectúa 59 + 6, aplicando dos veces la misma propiedad asociativa:

$$59 + 6 = (50 + 9) + 6 = 50 + (9 + 6) = 50 + 15 = 50 + (10 + 5) = (50 + 10) + 5 = 60 + 5 = 65$$

o sea,

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (1)} \\ 59 \\ +\,6 \\ \hline 65 \end{array}$$

SUMANDOS

SUMA

Se suman unidades con unidades, cuidando de llevar las decenas de la suma a la columna siguiente.

46. Tercer caso: adición de dos o varios números cualesquiera. — Efectúa 72 + 27.

Observa el siguiente esquema, basado en la propiedad asociativa:

$$\begin{array}{r} 72 \\ +\,27 \\ \hline 99 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 70+2 \\ \rightarrow 20+7 \\ \hline \leftarrow 90+9 \end{array}$$

Efectúa 68 + 45.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (1)} \\ 68 \\ +\,45 \\ \hline 113 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 60+8 \\ \rightarrow 40+5 \\ \hline \leftarrow 100+13 \end{array}$$

Se suman unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas, cuidando de llevar las decenas de cada suma a la columna siguiente.

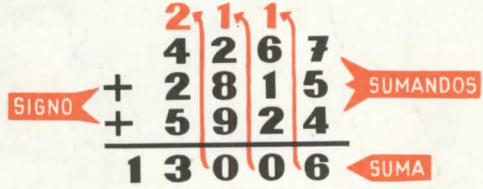
En la práctica, si la adición no comprende muchos términos, no se escriben las unidades de orden superior procedentes de cada columna; se las añade de memoria.

EJEMPLO. *Papá ha ganado en un negocio 4267 pesetas en una semana, 2815 pesetas la semana siguiente y 5924 pesetas la tercera semana. ¿Cuánto ha ganado en las tres semanas?*

Las 4267 pesetas equivalen a 4 billetes de mil pesetas, 2 billetes de cien pesetas, 6 montones de diez pesetas y 7 pesetas sueltas. Y análogamente para las otras dos cantidades.

Parece natural que sumemos primero las pesetas sueltas; luego, los montones de diez pesetas; después, los billetes de cien, y, por último, los de mil entre sí.

Decimos: 7 y 5, 12, y 4, 16; escribo 6 y llevo 1; y 6, 7 y 1, 8 y 2, 10; escribo 0 y llevo 1; y 2, 3, y 8, 11 y 9, 20; escribo 0 y llevo 2; y 4, 6 y 2, 8 y 5, 13.



47. Prueba de la suma. — Para hacer la prueba de una suma se la puede efectuar en otro orden. Se debe obtener el mismo re-

sultado, ya que en una suma se puede invertir el orden de los términos (núm. 41).

Si se suman muchos números, se pueden efectuar adiciones parciales y hallar luego la suma de los resultados obtenidos. Debe resultar el mismo total, ya que en una suma se pueden sustituir varios términos por su suma efectuada (núm. 42).

EJERCICIOS

Efectúa las sumas siguientes:

1.
258707
+ 380558
+ 1974934
+ 54300
?

2.
8570559
+ 854616
+ 2625147
+ 62871
?

3.
24795
+ 68473
+ 3851
+ 16092
?

4.

$$\begin{array}{r} 569451 \\ +\ 215986 \\ +\ 68710 \\ +\ 521098 \\ \hline ? \end{array}$$

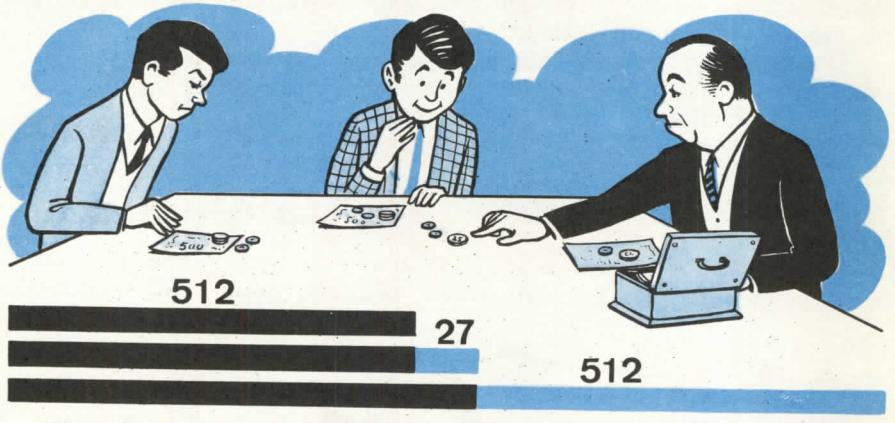
5.

$$\begin{array}{r} 2308574 \\ +\ 627930 \\ +\ 3710863 \\ +\ 578112 \\ \hline ? \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r} 9457160 \\ +\ 854908 \\ +\ 713617 \\ +\ 3200554 \\ \hline ? \end{array}$$

7. Tres personas se reparten cierto número de pesetas. La primera recibe 512 pesetas. La segunda, 27 pesetas más que la primera. La tercera, un número igual a la suma de las dos primeras. ¿Cuál es la parte de cada una? ¿Cuál es la suma repartida?



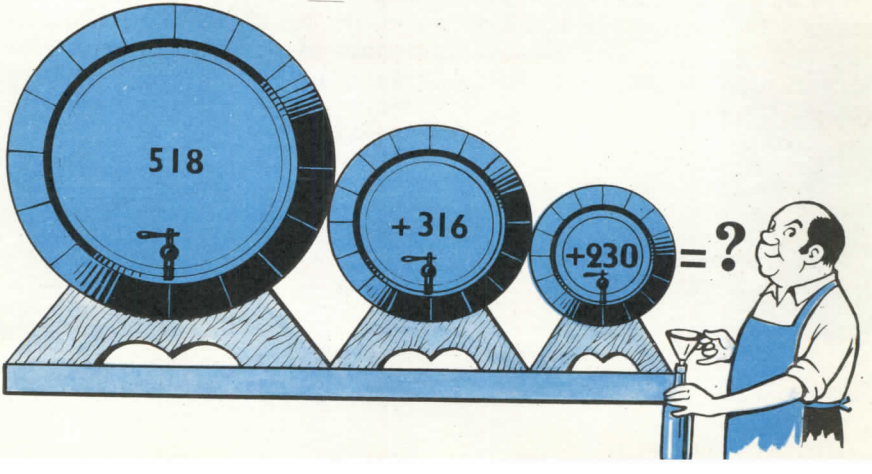
8. Juan recibe un donativo de 288 pesetas; Pedro, otro de 137 pesetas más que Juan, y Andrés, tanto como Juan y Pedro juntos, más 80 pesetas. ¿Cuánto recibieron entre los tres?

9. Un empresario adquiere una finca en 237540 pesetas. Construye en ella una casa por valor de 587212 pesetas y lo vende todo ganando 151218 pesetas. ¿En cuánto lo vendió?

10. He comprado un automóvil por 73600 pesetas. Gasto en arreglarlo 4560 pesetas y lo vendo ganando 6250 pesetas. ¿Por cuánto lo vendí?

11. Pagamos una deuda entregando 4 billetes de 1000 pesetas, 5 billetes de 100 pesetas, 3 billetes de 25 pesetas y 8 pesetas sueltas. ¿Cuál era nuestra deuda?

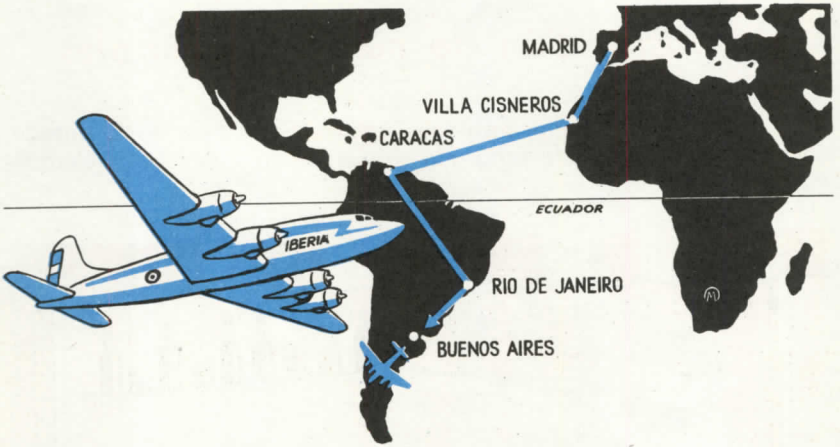
12. Un vinatero tiene 518 litros de vino en un tonel, 316 en otro y 230 en un tercero. ¿Cuántos litros de vino tiene?



13. Un deudor pagó primero 1530 pesetas, y más tarde, 3450 pesetas, quedándole tanto como había pagado más 640 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía?

14. Un labrador vendió la aceituna recogida en su finca por 25370 pesetas, el trigo por 42500 pesetas, el vino por 73000 pesetas y el maíz por 36450 pesetas. ¿Cuánto cobró en total?

15. Un avión de la Iberia ha recorrido los trayectos siguientes:



Madrid - Villa Cisneros	=	2325 Km
Villa Cisneros - Caracas	=	4876 Km
Caracas - Río Janeiro	=	3626 Km
Río Janeiro - Buenos Aires	=	1685 Km

¿Cuánto ha recorrido en total entre la ida y el regreso a Madrid?

16. ¿Cuál es el mayor desnivel existente entre dos puntos del globo, sabiendo que la mayor profundidad del Océano, la fosa de Mindanao, está a 10830 m bajo el nivel del mar, y la mayor altura, el monte Everest, se encuentra a 8848 m sobre el nivel del mar?

17. Hallar dos números enteros consecutivos, sabiendo que su suma es: *a*) 45; *b*) 497.

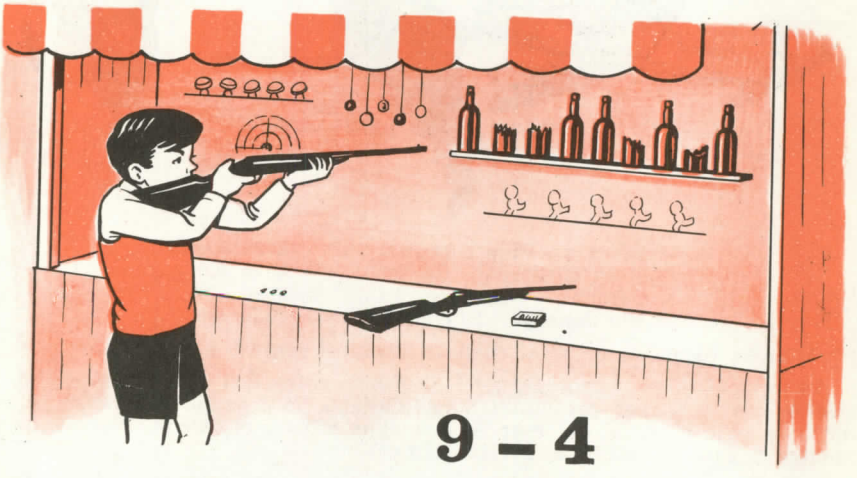
MODELO: *Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma es* 231.

Si al menor le sumásemos 1, quedarían los dos iguales y la suma sería 232. Pero entonces cada uno de ellos valdría 232 : 2 = 116. Los números son **115** y **116.**

11

La sustracción de números naturales

48. Diferencia de dos números naturales. — *Luis está tirando al blanco en una barraca de feria. Ha roto 4 de las 9 botellas. ¿Cuántas le faltan por romper?*



El número de botellas que le faltan por romper es un número tal que sumado con 4 da 9. Es el número 5, o sea le faltan por romper **5 botellas.** Este resultado se escribe así:

$$9 - 4 = 5 \qquad (1)$$

y equivale a

$$4 + 5 = 9 \qquad (2)$$

En la igualdad (1), al 9 se le llama **minuendo;** al 4, **sustraendo,** y al 5, **diferencia.**

EJERCICIOS. 1. De la igualdad $4 + 5 = 9$, ¿puedes deducir que

$$9 - 5 = 4? \qquad (3)$$

¿Cuál es en este caso el minuendo, cuál el sustraendo y cuál la diferencia?

2. Juan tiene 18 cromos, pero pierde 5. ¿Cuántos le quedan?
Le quedan

$$18 \text{ cromos} - 5 \text{ cromos} = 13 \text{ cromos}$$

3. Antonio tiene que recorrer 253 metros para ir al colegio. ¿Cuántos le faltan cuando ha andado 132 metros?
Le faltan

$$253 \text{ m} - 132 \text{ m} = 121 \text{ m}.$$

49. Equivalencias fundamentales. — Las tres igualdades (1), (2) y (3) que has escrito anteriormente se llaman **equivalencias fundamentales** de la sustracción: si una es cierta, lo son también las otras dos. Si una cualquiera de ellas es falsa, lo son igualmente las otras dos. Esto se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{9 - 4 = 5 \iff 9 = 5 + 4 \iff 9 - 5 = 4}$$

Ejercicios. 1. Dada la igualdad $16 = 9 + 7$, escribe las otras dos equivalentes. ¿Es verdadera la primera? ¿Son ciertas las otras dos? Son: $16 - 9 = 7$; $16 - 7 = 9$.

2. Escribe las dos igualdades equivalentes a ésta

$$7 + a = 13$$

y deduce de una de ellas cuál ha de ser el valor de la letra *a* para que sea cierta. Es $a = 13 - 7 = 6$.

3. En la igualdad

$$x - 8 = 4 \qquad (4)$$

¿qué número tendrás que poner en lugar de la letra para que sea verdadera?

Has obtenido la solución escribiendo

$$x - 8 = 4 \iff x = 8 + 4 \iff x - 4 = 8$$

La segunda de las tres da

$$x = 8 + 4 = 12 \qquad (5)$$

lo que nos dice que en lugar de *x* hay que poner el número 12.

Una igualdad como la (4) en la que aparece una letra desconocida se llama *ecuación*. La letra desconocida se llama *incógnita*.

La operación expresada por la igualdad (5) se llama *despejar la incógnita x*. El número 12 se llama *raíz* o *solución* de la ecuación: es el valor que sustituido en lugar de la incógnita, satisface la igualdad.

50. Trasposición de términos. — Llamando *m* al minuendo, *s* al sustraendo y *d* a la diferencia, en el número anterior hemos visto que la igualdad

$$m - s = d \qquad (6)$$

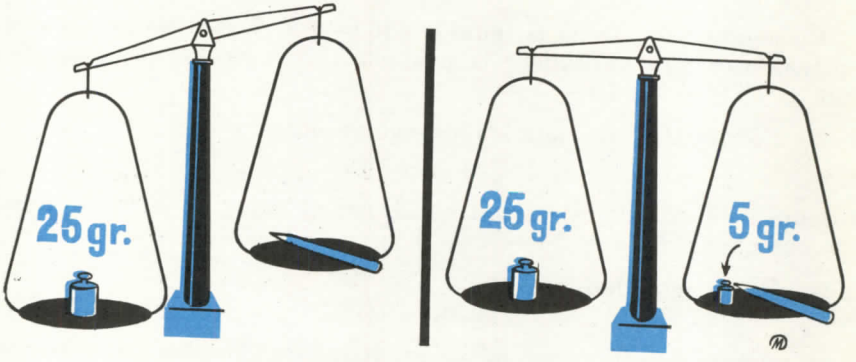
equivale a esta otra:

$$m = s + d \qquad (7)$$

y recíprocamente de la igualdad (7) se deduce inmediatamente la (6). Esto nos hace ver que un número que está restando en un miembro puede pasar al otro sumando. Y lo que está sumando en un miembro puede pasar al otro restando.

Esta operación se llama *trasposición de términos* de un miembro a otro.

EJERCICIOS. 1. *Para hallar el peso de un lápiz lo colocamos en un platillo de la balanza, poniendo en el otro un peso de 25 g. La balanza se desequilibra. Se vuelve a equilibrar en cuanto colocamos junto al lápiz una pesa de 5 g. ¿Cuánto pesa el lápiz?*



Solución.—Llamando x el peso del lápiz, por ser de momento desconocido, sabemos que los pesos de un platillo, 5 + x, igualan la pesa del otro platillo, 25 g, o sea:

$$5 + x = 25$$

Pasando el 5 al segundo miembro queda:

$$x = 25 - 5 = \mathbf{20\ g.}$$

2. Dada la diferencia de dos números y uno de ellos, hallar el otro.

Sea 7 la diferencia de dos números, uno de ellos 18, y el minuendo, desconocido, x. Será:

$$7 = x - 18$$

Pasando el 18 al primer miembro queda:

$$7 + 18 = x$$

o sea:

$$25 = x$$

En una igualdad, el número que está sumando en un miembro se traspone al otro restando, y el que está restando en un miembro se pasa al otro sumando.

51. La diferencia de dos números naturales no siempre existe. — Trata de hallar el valor de x en la igualdad

$$x = 8 - 11 \qquad (8)$$

Esta equivale a

$$x + 11 = 8$$

y vemos que no tiene solución, porque si a 11 le sumamos un número, resulta un número mayor que 11, y no puede dar 8. El minuendo, 8, de la sustracción (8) ha de ser mayor que el sustraendo, 11.

Para que la diferencia sea posible tiene que ser el minuendo mayor que el sustraendo.

Ejercicios. 1. ¿Tiene sentido la expresión

$$7 - x = 12?$$

Para contestar despeja x y mira si se puede efectuar la sustracción.

2. De las igualdades siguientes halla cuáles tienen sentido y cuáles no:

$$15 - 12 = x \quad ; \quad x - 8 = 5 \quad ; \quad 16 - 23 = x$$

y calcula el valor de x cuando sea posible.

52. La sustracción es la operación inversa de la adición. — ¿Cuál es el valor de la expresión $(7 - 2) + 2$? Llamemos x dicho valor, de momento desconocido, o sea

$$(7 - 2) + 2 = x$$

Como en la adición, el paréntesis es un mandato de prioridad: indica que la primera operación que hay que realizar es la encerrada

dentro del mismo. Por tanto el paréntesis puede considerarse como un solo número, o sea el resultado efectuado.

Aplicando las equivalencias fundamentales, obtenemos

$$(7 - 2) + 2 = x \Leftrightarrow x - 2 = 7 - 2$$

De la segunda igualdad deducimos que

$$x = 7$$

o sea

$$(7 - 2) + 2 = 7$$

Ejercicios. 1. Halla del mismo modo el valor de

$$(6 + 1) - 1 = x$$

Se tiene

$$(6 + 1) - 1 = x \Leftrightarrow x + 1 = 6 + 1$$

De donde

$$x = 6 \ ; \ (6 + 1) - 1 = 6$$

2. ¿Qué número escribirás dentro del círculo, para que sean ciertas las igualdades

$$(\bigcirc + 8) - 8 = \bigcirc \ ; \ (5 - \bigcirc) + \bigcirc = 5?$$

3. ¿Qué números representan *a* y *b* en las igualdades

$$(a - b) + b = a \ ; \ (a + b) - b = a? \qquad (9)$$

Concluyes que lo que hace la adición lo deshace la sustracción, y recíprocamente.

Se dice que **la sustracción es la operación inversa de la adición.** Esto significa que

Si a un número dado se le suma y resta una misma cantidad, el número dado no altera.

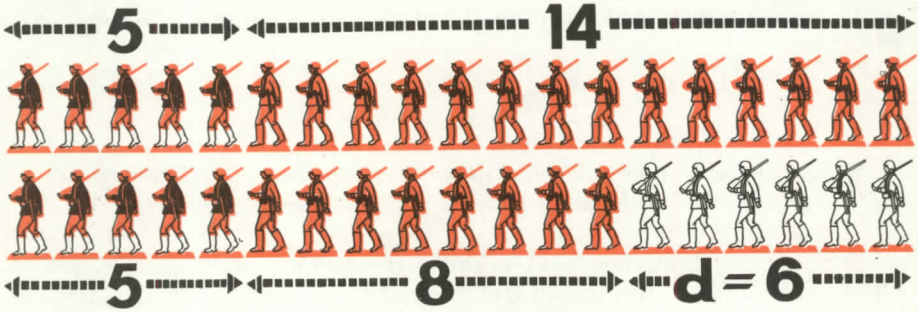
53. Variación de la diferencia al sumar al minuendo y sustraendo el mismo número. — *Manuel tiene 14 soldaditos y Javier sólo 8. ¿Cuántos más tiene Manuel?*

Manuel tiene

$$14 - 8 = 6 \text{ soldaditos}$$

más que Javier.

La abuela da 5 soldaditos a Manuel y otros 5 a Javier. ¿Cuántos más tiene ahora Manuel?



Fácilmente observarás en la figura que la diferencia sigue siendo la misma que antes, o sea

$$(14 + 5) - (8 + 5) = 14 - 8 = 6 \text{ soldaditos}$$

Ejercicios. 1. Haciendo las operaciones comprueba que

$$(18 + 5) - (7 + 5) = 18 - 7$$

2. ¿Qué número has de escribir dentro del círculo para que se verifiquen las igualdades

$$(12 + \bigcirc) - (5 + \bigcirc) = 12 - 5$$
$$(\bigcirc + 8) - (18 + 8) = \bigcirc - 18?$$

3. ¿Qué número representan las letras a, b y c para que sean ciertas las igualdades

$$(a + b) - (c + b) = a - c \qquad (10)$$
$$(a - b) - (c - b) = a - c? \qquad (11)$$

Concluyes que:

Si el minuendo y el sustraendo aumentan o disminuyen en un mismo número, la diferencia no varía.

54. Resolución de problemas mediante ecuaciones. —Es importante aprendas a resolver ecuaciones un poco complicadas y a aplicarlas a la resolución de problemas de la vida corriente.

EJEMPLOS. 1. *Halla el valor de la letra x en la igualdad*

$$12 - (x + 3) = 4$$

Di en cada paso qué propiedad aplicas, por ejemplo si sigues este camino:

$$(12 - x) - 3 = 4 \Longleftrightarrow 12 - x = 4 + 3 = 7;$$
$$12 - 7 = x \Longleftrightarrow 5 = x$$

2. *Alicia tiene una colección de cromos; da a su hermanita Luisa 6 cromos y le quedan todavía 14 cromos. ¿Cuántos tenía al principio?*

Solución. — Llamemos *x* el número de cromos que tenía al principio. Entonces el enunciado del problema se escribe así:

$$x - 6 = 14$$

y por las equivalencias fundamentales de la sustracción

$$x = 14 + 6 = \mathbf{20\ cromos.}$$

Tenía al principio 20 cromos.

3. *Un depósito contiene 85 litros de agua. Se sacan primero 18 litros y luego un número de litros desconocido, quedando 48 litros. ¿Cuántos litros se sacaron la segunda vez?*

Solución.—El enunciado del problema se escribe así:

$$85 - (18 + x) = 48$$

Di qué propiedades se aplican en los pasos siguientes:

$$85 - 48 = 18 + x \ ; \ 37 = 18 + x$$
$$37 - 18 = x \Rightarrow 19 = x$$

Se sacaron 19 litros.

4. *Inventa un problema cuya expresión matemática sea esta igualdad*

$$(x + 8) - 5 = 16$$

y resuélvelo.

Por ejemplo: Luis lleva cierta cantidad de dinero. Se encuentra con su tía, que le da 8 pesetas; poco después se compra 5 pesetas de caramelos, quedándole 16 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

EJERCICIOS

1. ¿Qué variación sufre la diferencia de dos números:

a) Si el minuendo aumenta en 15.
b) Si el sustraendo aumenta en 15.
c) Si el sustraendo aumenta en 13 y el minuendo en 15.
d) Si el minuendo aumenta en 13 y el sustraendo en 15?

2. ¿Qué se obtiene: 1.º, si se añade la diferencia de dos números al sustraendo; 2.º, si se resta la diferencia de dos números del minuendo?

Deduce el valor de la letra x en cada una de las siguientes igualdades:

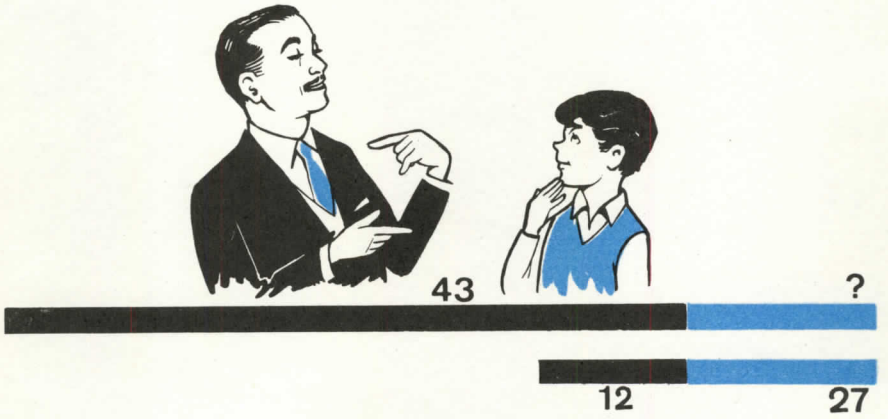
3. $10 + x = 22$.
4. $(16 + x) - 5 = 23 - 4$.
5. $28 = x + 15$.
6. $x + 10 = 27 - 4$.
7. $x + 3 = 18 + 15$.
8. $15 - (3 + x) = 10$.
9. $13 + x = 16 - (4 - 2)$.
10. $18 + (x - 10) = 27$.
11. $(6 + x) - 2 = 30 - 16$.
12. $42 = x + 16$.
13. $54 = (10 + x) - 25$.
14. $27 = x - 43$.
15. $13 - (x + 7) = 3$.
16. $4 = 36 - (x + 9)$.
17. $45 = x + 17$.
18. $x - 8 = 23$.

19. Victoria tiene 3 años más que Anita. ¿Cuántos años más tendrá el año próximo? ¿Y cuántos más tenía hace dos años? ¿Tiene esto alguna relación con una propiedad estudiada en esta lección?

20. La criada ha salido de compras con 87 ptas., y ha devuelto 34 ptas. ¿Cuánto ha gastado?

21. Un industrial compró un automóvil por 164500 ptas., a pagar en 3 años. El primer año pagó 43250 ptas., y el segundo 68300 ptas. ¿Cuánto tendrá que pagar el tercer año?

22. Un señor tiene 43 años y su hijo 12. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo tenga 27?



23. Un saco contiene 58 kg de arroz. Se sacan de él 16 kg y a continuación se transporta a otra tienda, perdiéndose en el camino cierta cantidad de arroz. Al final quedan 34 kg ¿Qué cantidad de arroz se perdió en el camino?

24. Un coche ha tardado 12 horas en su viaje de San Sebastián a Madrid. Teniendo en cuenta que estuvo parado 3 horas en la mitad del trayecto, ¿cuánto tiempo tardó realmente en el viaje?

25. Un rebaño consta de 125 ovejas, de las cuales se venden 48 en el mercado. Después los lobos asaltan el redil y matan un cierto número de ovejas, quedando entonces 63 ovejas. ¿Cuántas ovejas mataron los lobos? Plantea la ecuación y resuélvela.

26. Inventa un problema que responda a esta igualdad

$$63 - (45 - x) = 27$$

y resuélvelo.

27. Si al dinero que tiene Carlos le quitamos el dinero que tiene Luis, que son 16 pesetas, y después le añadimos el dinero que tiene Juan, que son 25 pesetas, quedarán 31 pesetas. ¿Cuánto dinero tiene Carlos?

28. De cada una de las siguientes igualdades, que tú completarás, deduce las otras dos igualdades equivalentes:

a) $31 - 16 = \ldots$; *b*) $18 + 11 = \ldots$; *c*) $48 - 17 = \ldots$;
d) $64 + 36 = \ldots$; *e*) $78 - 52 = \ldots$; *f*) $91 + 19 = \ldots$;
g) $32 - 15 = \ldots$; *h*) $27 + 32 = \ldots$; *i*) $26 - 12 = \ldots$

12

Polinomios aritméticos

55. Definición. — Halla el valor de $(8 - 5) - 2$ y de $8 - (5 - 2)$, para comprobar si son iguales.

$$(8 - 5) - 2 = 3 - 2 = 1$$
$$8 - (5 - 2) = 8 - 3 = 5$$

Por tanto

$$(8 - 5) - 2 \neq 8 - (5 - 2)$$

La sustracción no tiene la propiedad asociativa.

Luego no se puede en rigor prescindir de paréntesis al escribir una serie de adiciones y sustracciones combinadas, ya que el valor que se obtiene depende del orden en que se realicen las operaciones.

Solamente podría prescindirse de paréntesis en el caso de indicar bien claramente el orden en que han de realizarse las operaciones. Pues bien, en una expresión del tipo

$$6 - 4 + 7 - 5 + 8 - 2,$$

a la que llamamos **polinomio aritmético,** convenimos en adelante que **las operaciones han de realizarse en el mismo orden en que aparecen de izquierda a derecha.**

Con este convenio el polinomio aritmético tiene un significado bien preciso. En el ejemplo anterior vale

$$6 - 4 + 7 - 5 + 8 - 2 = 2 + 7 - 5 + 8 - 2 = 9 - 5 + 8 - 2 =$$
$$= 4 + 8 - 2 = 12 - 2 = 10$$

EJEMPLOS. 1.° $6 - 3 + 2 - 4 = 3 + 2 - 4 = 5 - 4 = 1$

2.° $12 - 8 + 9 - 6 - 2 = 4 + 9 - 6 - 2 = 13 - 6 - 2 =$
$$= 7 - 2 = 5$$

56. Variación de la suma al disminuir uno de los sumandos. — *Juan tiene 8 canicas y su hermanita Luisa tiene 12. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?*

Tienen

$$8 + 12 = 20 \text{ canicas}$$

Luisa pierde 5 de sus 12 canicas. ¿Cuántas tienen ahora entre los dos?

Tienen ahora

$$20 - 5 = (8 + 12) - 5 = 15 \text{ canicas.}$$

Por otra parte, Juan tiene 8 y Luisa 12 — 5; entre los dos $8 + (12 - 5)$.

O sea

$$8 + (12 - 5) = (8 + 12) - 5$$

EJERCICIOS. 1. Comprueba efectuando las operaciones que

$$7 + (5 - 3) = (7 + 5) - 3$$

$$7 + (5 - 3) = 7 + 2 = 9 \quad ; \quad (7 + 5) - 3 = 12 - 3 = 9$$

2. ¿Qué número puedes colocar en lugar de la letra *a* para que se verifiquen las igualdades

$$a + (7 - 4) = (a + 7) - 4$$
$$5 + (a - 2) = (5 + a) - 2?$$

3. ¿Qué números puedes poner en lugar de las letras para que

$$a + (b - c) = (a + b) - c \quad ? \qquad (1)$$

Expresa así la igualdad anterior:

Si un sumando disminuye en un número, la suma disminuye en el mismo número.

57. Paréntesis precedido del signo más. — En el número anterior vimos que

$$a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c \qquad (2)$$

ya que, con el convenio del número 55, se puede prescindir del paréntesis.

Podemos generalizar el resultado (2) conviniendo que:

$$a + (b - c + d - e) = a + b - c + d - e \qquad (3)$$

Al suprimir un paréntesis precedido del signo +, se conservan los signos a todos los términos que encierra.

EJEMPLOS. 1.° $16 + (7 - 5 + 4) = 16 + 7 - 5 + 4 = 23 - 5 + 4 = 18 + 4 = 22$

2.° $(2 + 7) + (8 - 6 - 1 + 3) = 2 + 7 + 8 - 6 - 1 + 3 = 9 + 8 - 6 - 1 + 3 = 17 - 6 - 1 + 3 = 11 - 1 + 3 = 10 + 3 = 13$

58. Variación de la diferencia cuando el sustraendo aumenta o disminuye. — a) *Margarita tiene 5 muñecas y Alicia 3. ¿Cuántas más muñecas tiene Margarita?*

Margarita tiene

$$5 - 3 = 2 \text{ muñecas}$$

más que Alicia.

Cuando Alicia pierde una de sus muñecas, ¿cuántas más tendrá Margarita?

Tendrá

$$2 + 1 = (5 - 3) + 1 = 3 \text{ muñecas}$$

más que Alicia; por otra parte Alicia tiene (3 — 1) muñecas y Margarita 5 — (3 — 1) más que ella, o sea

$$5 - (3 - 1) = (5 - 3) + 1$$

EJERCICIOS. 1. Comprueba, efectuando las operaciones, que

$$18 - (13 - 7) = (18 - 13) + 7$$

2. Comprueba que para todos los valores que demos a las letras, se verifica que

$$a - (b - c) = (a - b) + c \qquad (4)$$

Si el sustraendo disminuye en un número, la diferencia aumenta en el mismo número.

b) *En los hilos de Telégrafos hay 9 gorriones. Se marchan primero 2 y luego 3. ¿Cuántos quedan?*

$$9 - (2+3)$$

Evidentemente quedarán

$$9 - (2 + 3) = 9 - 5 = 4 \text{ gorriones.}$$

Por otra parte, después de marcharse los dos primeros quedan

$$9 - 2 = 7 \text{ gorriones}$$

y después de marcharse los 3 últimos

$$7 - 3 = (9 - 2) - 3 = 4 \text{ gorriones}$$

Por tanto

$$9 - (2 + 3) = (9 - 2) - 3$$

Ejercicios. 1. ¿Es cierto que

$$18 - (7 + 8) = (18 - 7) - 8?$$

2. ¿Qué valores puedes poner en lugar de las letras, en la igualdad

$$a - (b + c) = (a - b) - c \; ? \qquad (5)$$

Enuncia así:

Si se aumenta el sustraendo en un número, la diferencia disminuye en el mismo número.

59. Paréntesis precedido del signo menos. — En el número anterior vimos que

$$a - (b - c) = (a - b) + c = a - b + c \qquad (6)$$
$$a - (b + c) = (a - b) - c = a - b - c \qquad (7)$$

ya que con el convenio del número 55 se puede prescindir de los paréntesis.

Podemos generalizar los resultados (6) y (7) así:

$$a - (b - c + d - e) = a - b + c - d + e \qquad (8)$$

Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos, se deben cambiar los signos de todos los términos que encierra.

EJEMPLOS. 1.° $10 - (6 - 4 + 3) = 10 - 6 + 4 - 3 = 4 + 4 - 3 = 8 - 3 = 5$

2.° $(9 + 3 - 4) - (6 - 5 + 3) = 9 + 3 - 4 - 6 + 5 - 3 = 12 - 4 - 6 + 5 - 3 = 8 - 6 + 5 - 3 = 2 + 5 - 3 = 7 - 3 = 4$

60. Resumen de las propiedades de adiciones y sustracciones. — Conviene que escribamos juntas las cinco propiedades principales que acabamos de demostrar en los párrafos anteriores.

1.ª $(a - b) + b = a$
2.ª $(a + b) - (c + b) = a - c$
3.ª $a + (b - c) = (a + b) - c$
4.ª $a - (b - c) = (a - b) + c$
5.ª $a - (b + c) = (a - b) - c$

Deberás manejarlas con frecuencia. Ellas te permitirán resolver muchos problemas de la vida diaria.

Observa que las igualdades anteriores son ciertas cualesquiera que sean los valores dados a sus letras, con tal que des el mismo valor a la misma letra en los dos miembros.

Observa también que los números que elijas deben ser tales que todas las sustracciones sean posibles.

EJERCICIOS. 1. En la igualdad 3.ª, ¿se puede escribir que

$$8 + (5 - 11) = (8 + 5) - 11?$$

No, porque 5 — 11 no tiene sentido; no es ningún número natural.

2. ¿Podrías escribir las cinco propiedades cambiando el 2.° miembro por el primer miembro? Hazlo.

EJERCICIOS

1. Halla el valor numérico de los polinomios aritméticos:

a) $6 - 4 + 8 - 2$
b) $12 - 6 - 3 - 1$
c) $15 - 8 - 4 + 3$
d) $25 + 3 - 15 - 8$
e) $6 + 4 - 3 - 5$
f) $12 - 8 - 2 - 1$

2. Quita paréntesis, y efectúa:

a) $26 + (19 - 4) - (10 - 6)$
b) $18 - (6 + 3) - (5 - 2)$
c) $10 + (15 - 8) - (6 + 4)$
d) $8 - (1 + 7 - 10 - 2)$
e) $12 + (10 - 9 + 4 - 3)$
f) $5 + (13 - 11 - 1)$
g) $(15 + 2) - \{8 - [(9 - 3) - 4]\}$

3. Pon en lugar del punto el número conveniente:

$38 - 8 - . = 29$	$47 - . - 3 = 37$	$27 = 34 - 4 - .$
$25 - 5 - . = 18$	$52 - . - 4 = 46$	$34 = 45 - 5 - .$
$47 - 7 - . = 37$	$72 - . - 6 = 64$	$88 = 96 - 6 - .$
$42 - 4 - . = 30$	$94 - . - 4 = 85$	$42 = 52 - 2 - .$

4. Considera la adición de dos números $a + b$. Se aumenta a en 12. ¿Cómo tienes que modificar el otro número b para que la suma quede la misma?

5. Uno de los sumandos de una adición disminuye en 21. ¿Cómo varía la suma?

6. En una sustracción el sustraendo aumenta en 8. ¿Cómo varía la diferencia?

7. En una sustracción el sustraendo disminuye en 17. ¿Cómo varía la diferencia?

8. En una sustracción el minuendo aumenta en 16 y el sustraendo en 27. ¿Cómo varía la diferencia?

9. En una sustracción el minuendo y el sustraendo disminuyen en 6. ¿Cómo varía la diferencia?

10. Se considera la adición de tres números $a + b + c$. Se aumenta a en 18. Indica varios modos de variar b, o c, o ambos, para que la suma permanezca la misma.

11. Resuelve la ecuación

$$(3 + x) - (2 - x) + (7 - x) = 15$$

12. Encuentra dos números sabiendo que su diferencia es 7 y su suma 23. Llama x el menor de los números, con lo que el mayor será $x + 7$. Plantea en seguida la ecuación correspondiente, y resuélvela.

13

Práctica de la sustracción

Ya sabes restar desde la Primera Enseñanza. Se trata de que ahora entiendas por qué restas como lo haces.

61. Sustraendo y diferencia de una sola cifra. —Efectúa las sustracciones

$$7 - 4 = \quad ? \quad ; \quad 13 - 6 = \quad ? \quad ; \quad 15 - 7 = \quad ?$$

Te ha bastado hallar mentalmente un número que sumado al sustraendo dé el minuendo.

También puedes utilizar para ello la tabla de sumar:

Por ejemplo

$15 - 8 = 7$

(Sigue las flechas)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

62. Minuendo y diferencia de dos cifras. — 1.º) Efectúa la sustracción

$$58 - 3 = \quad ?$$

En realidad lo que haces es

$$58 - 3 = (50 + 8) - 3 = 50 + (8 - 3) = 50 + 5 = 55$$

Utilizas la propiedad 3.ª, invirtiéndola (núm. 60).

2.º) Si se trata de la sustracción

$$43 - 8 = \quad ?$$

ahora de 3 no puedo restar 8, pero añado 10 unidades al minuendo y 1 decena al sustraendo, con lo que la diferencia no varía (núm. 53):

$$\begin{array}{rcl} 43 & \rightarrow & 40 + 13 \\ -\ 8 & \rightarrow & -\ 10 - \ 8 \\ \hline 35 & \leftarrow & 30 + \ 5 \end{array}$$

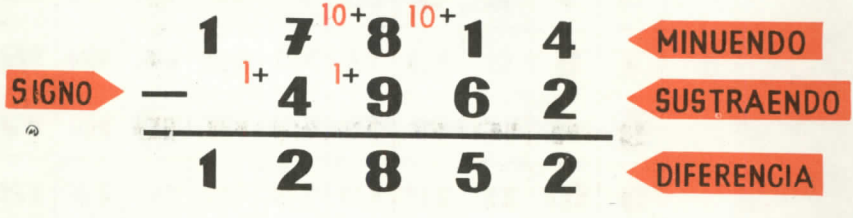
63. Caso general: disposición práctica. — *Papá tiene en caja 17814 pesetas y paga una factura de 4962 pesetas. ¿Cuánto dinero le queda?*

Le quedan (17814 — 4962) pesetas.

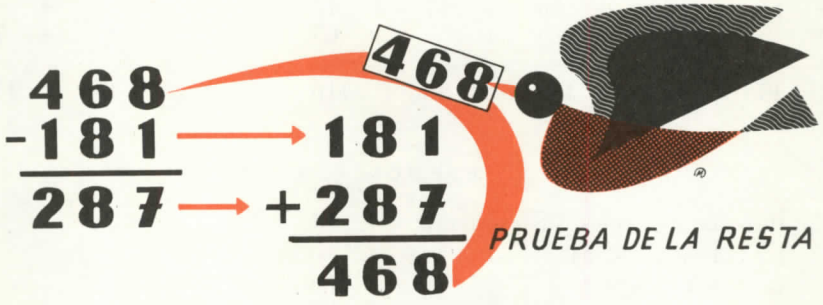
Las 17814 pesetas equivalen a 17 billetes de mil, 8 billetes de cien, 1 montón de diez pesetas y 4 monedas sueltas. Y análogamente para la otra cantidad.

Parece natural que restemos primero las pesetas sueltas, luego los montones de diez pesetas, después los billetes de cien y por último los de mil entre sí.

Pero si alguna cifra del minuendo es inferior a su correspondiente del sustraendo, se le añade 10 a la primera, y como compensación, se añade 1 a la cifra siguiente del sustraendo. De este modo, según la propiedad 2.ª, la diferencia no variará (núm. 53).



64. Pruebas de la sustracción. — 1.ª Si se añade la diferencia al sustraendo debe obtenerse el minuendo.



2.ª Si del minuendo se resta la diferencia debe obtenerse el sustraendo.

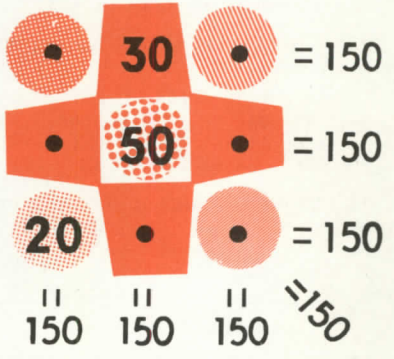
CÁLCULO MENTAL

- **Resta** de 100 sucesivamente cada uno de los siguientes números:

9, 6, 5, 8, 1, 2, 7, 8, 6, 3, 4

- **Resta** repetidamente de cada uno de los números de la fila horizontal cada uno de los números de la columna vertical, en el primer cuadro:

—	82	47	31	54
8				
6				
4				
13				



Coloca en el lugar del punto el número que convenga, en el segundo cuadro, para que sumando te dé ¡ciento cincuenta por todas partes!

● **Sustituye** los puntos por los números que convengan:

15	43	76	35	.	.	37	64
+ 17	+ 39	+ 58	+ 47	+ 18	+ 49	+ .	+ .
+ .	+ .	+ .	+ .	+ 65	+ 67	+ 51	+ 75
48	102	163	96	116	128	99	133

EJERCICIOS

Haz las siguientes sustracciones:

1. 928000 — 327041.
2. 58803 — 29408.
3. 7051080 — 748543.
4. 64029 — 57856.
5. 729425 — 217816.
6. 125708 — 34337.

7. Si el minuendo vale 5583 y la diferencia 1810, ¿cuál es el sustraendo?; ¿y la suma de ambos con el sustraendo?

8. La diferencia de dos números es 54317. ¿En qué se convierte si se resta 37498 del minuendo?

9. La diferencia de dos números es 324; el mayor es 581; ¿cuál es el menor?

10. La diferencia de dos números es 43. ¿En qué se convierte si se añade 13 al sustraendo?

11. La diferencia de dos números es 102. ¿En qué se convierte si se añade 17 al sustraendo?

12. Calcula el resultado de las operaciones siguientes:

a) 2315 — (37 + 452)
b) 2715 — (377 + 12)
c) 3057 + (539 — 423)
d) 70375 + (2195 — 492)
e) 4039 — (3215 — 2237)
f) 5127 — (5725 — 4350).

13. Calcula las siguientes expresiones, sin hallar previamente el resultado de los paréntesis:

a) 140 — (54 + 65).
b) 243 — (370 — 186)
c) (80 — 13) — (53 — 13)
d) (63 — 8) — (42 — 8)
e) 78 — (25 + 34)
f) 172 — (42 + 87).
g) (14 + 5) — (12 + 5)
h) (35 — 16) — (25 — 16).

14. ¿Cuánto valen *a*, *b*, *c* y *d* en las siguientes operaciones?:

a428	96a1	8c57
+ 6b35	— 548b	— 491d
+ 79c7		
2388d	4146	3844

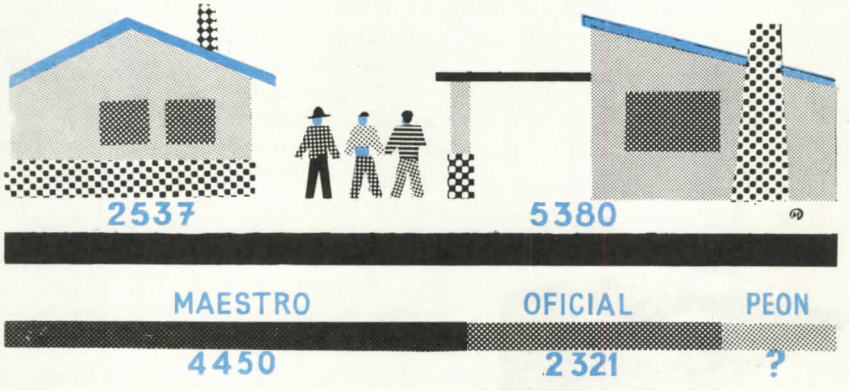
15. La suma de dos números es 15817 y uno de ellos es 9587. ¿Cuál es el otro?

16. La diferencia de dos números es 75 y el minuendo es 107. ¿Cuál es el sustraendo?

17. Por pagar al contado una factura de 1670 ptas., nos hacen una rebaja de 240 ptas. Entregamos dos billetes de 1000 ptas. ¿Cuánto nos devolverán?

18. Una gallina ha puesto en un año 143 huevos. ¿Cuántos más ha dado que el año anterior en que solamente puso 117?

19. Tres obreros albañiles realizan dos trabajos por los que perciben 2537 pesetas y 5380 pesetas, respectivamente. El maestro recibe 4450 pesetas y el oficial 2321 pesetas. ¿Cuánto percibe el peón?



20. En las notas semanales los alumnos A, B y C han obtenido un total de 921 puntos. A, ha conseguido 318 puntos; B, 45 menos. ¿Cuántos ha obtenido C?

21. Un señor tiene 37 años y su hijo 11. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo cumpla 37 años? ¿Qué edad tenía el hijo cuando su padre cumplió los 30?

22. Una aldeana lleva al mercado 548 huevos. Por la mañana vende 213 y por la tarde 137. Finalmente, en el camino, de regreso, vende 15. ¿Con cuántos llegó a casa por la noche?

23. Un comerciante paga dos deudas de 8570 pesetas y 3216 pesetas, respectivamente, entregando 12 billetes de 1000 pesetas. ¿Cuánto le devolverán?

24. Si tuviera 45 pesetas más de lo que poseo podría comprar un balón de 250 pesetas y me sobrarían 16 pesetas. ¿Cuánto poseo?

25. Si hubiera vendido en 40 pesetas más una bicicleta que me costó 850 hubiera ganado 100 pesetas. ¿En cuánto la vendí?

26. Tenemos 63 lápices de dibujo en 3 cajas; la primera contiene 21 y la segunda 8 más. ¿Cuántos contiene la tercera?

27. En mi casa compraron 4 sacos de arroz de 53, 48, 65 y 70 kg respectivamente; se han gastado ya 121 kg. ¿Cuántos quedan?

28. Un constructor ha gastado 1384568 pesetas en hacer una casa. La vende en seguida por 1654600 pesetas. ¿Cuánto ha ganado?

29. Un vagón lleno de carbón pesa 18126 kg; la tara (peso del vagón) es 5025 kg. ¿Cuál es el peso del carbón?

14

Conceptos fundamentales de la Geometría plana

65. El plano. — Toma una cuartilla, que puede ser una hoja de cuaderno, y colócala sobre tu mesa. Amplía dicha cuartilla con otras iguales colocadas al lado de la misma. Supón que esta ampliación la prosigues indefinidamente. La figura que así obtendrías se denomina *plano*.

En adelante materializaremos un plano mediante una cuartilla, pero quede bien entendido que ésta ha de considerarse con toda su capacidad de ampliación. Un plano, por tanto, es ilimitado en todas las direcciones.

EJEMPLOS. 1. ¿Por qué hemos dicho que coloques la cuartilla sobre la mesa? ¿Representaría aquélla un plano, si hicieras con ella un cucurucho?

2. Observa la superficie del agua en una piscina. ¿Es plana? Lo es.

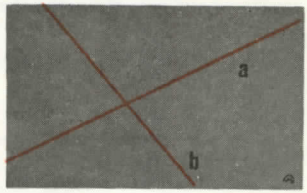
3. ¿Se pueden superponer dos planos? Hazlo con dos cuartillas.

66. La línea recta. — Toma una cuartilla y haz en ella un doblez. Al desdoblar marca con tu lápiz la señal que ha quedado en el papel. La figura que has dibujado se llama *línea recta*.

EJEMPLOS. 1. Ya que el plano es ilimitado, ¿tendrá fin la línea recta? La línea recta es ilimitada en sus dos sentidos.

2. Da otro doblez en la cuartilla anterior y marca con lápiz la nueva recta que resulta. ¿Cómo nombrarías las dos rectas que tienes dibujadas en tu papel, para distinguir una de otra?

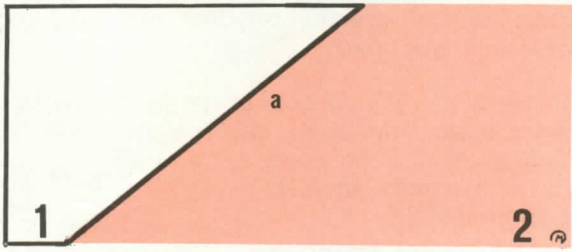
Se acostumbra a nombrarlas con una letra minúscula. Así la recta *a* y la recta *b*.



3. ¿Será una recta un hilo bien tenso? ¿Has visto a los albañiles, pintores, etcétera, obtener líneas rectas mediante hilos tirantes?

4. Da ejemplos de líneas rectas en la clase.

67. El semiplano. — Haz un doblez en un papel. Llama *a* la recta que resulta. Observa que ésta divide al plano en dos regiones. Colorea una de ellas con lápiz de color. La parte que has coloreado se llama *semiplano*. La parte que no has coloreado es otro semiplano.



Los llamaremos 1 y 2 respectivamente.

Se llaman *opuestos*. ¿Cuál es el semiplano opuesto del 1? ¿Y el del 2?

Andando sobre el plano, ¿podrías atravesar del semiplano 1 al semiplano 2, sin tocar en la recta *a*? Por esta propiedad se llama a esta recta *frontera* de los semiplanos, y por ser lo que limita a los mismos se le llama *borde* de cada uno de ellos.

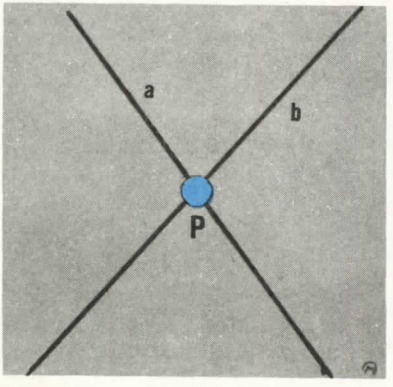
En general, lo que limita una figura se denomina *borde* de la misma.

EJEMPLOS. 1. ¿Cuál es el borde del semiplano 1? ¿Y el del semiplano 2? En ambos casos es la recta *a*.

2. Los bordes de la cuartilla, ¿son bordes de los semiplanos 1 y 2? No.

3. ¿Qué es lo que limita a un semiplano? Solamente su borde.

68. El punto. — Haz dos dobleces en un papel y marca las rectas respectivas *a* y *b*.



Recuerda que llamamos *intersección* la parte común a dos conjuntos. La intersección de las rectas *a* y *b* la llamamos **punto.**

Punto es la intersección de dos rectas.

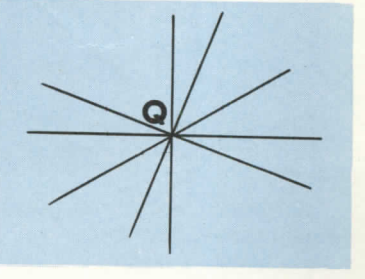
Los puntos los designamos con letras mayúsculas. Así la intersección de las rectas *a* y *b* es el punto P.

Un punto P que pertenece a una recta *a* se dice que es **incidente** con dicha recta. Y también que la recta es **incidente** con el punto.

EJEMPLOS. 1. ¿Es la recta *b* incidente con el punto P, en la figura anterior? Sí.

2. Traza una recta y señala varios puntos P, Q, R, S, ..., incidentes con ella. Por muchos que hayas señalado, ¿podrás tomar siempre alguno más? ¿Podremos concluir que una recta contiene todos los puntos que queramos?

69. Haz de rectas. — Toma una cuartilla y señala en ella un punto Q. ¿Puedes trazar una recta que sea incidente con Q? Verás que resulta fácil hacerlo. Pero ¿puedes trazar otra y otra más, incidentes todas con el punto Q?



¿Cuántas rectas puedes trazar incidentes con Q? Por muchas que hayas trazado siempre puedes trazar una más.

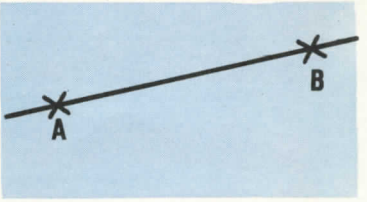
Concluye que **se pueden trazar todas las rectas que se quieran incidentes con un punto dado Q.**

El conjunto de todas estas rectas constituye una figura llamada **haz de rectas.**

70. Propiedad fundamental de la recta. — Señala dos puntos A y B en una cuartilla e intenta hacer un doblez incidente con am-

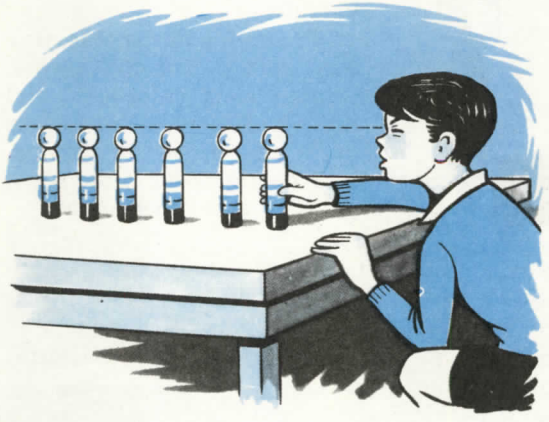
bos. Verás que, procediendo con cuidado, puedes conseguirlo. O sea, **existe siempre una recta incidente con dos puntos dados** A y B.

¿Puedes dar otros dobleces, distintos del anterior, que pasan por A y B? Verás que resulta imposible. Concluye que **existe siempre una recta, y solamente una, incidente con dos puntos dados** A y B.



La recta incidente con los puntos A y B la denominamos recta AB.

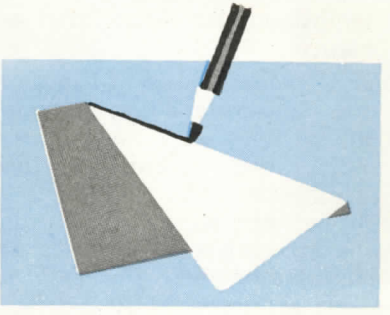
EJEMPLOS. 1. Para alinear unos bolos se colocan dos de ellos y luego se ponen los demás de modo que, enfilándolos mediante una visual, se vean todos como uno solo.



2. Es corriente también ver que los albañiles, pintores, etc., obtienen líneas rectas mediante hilos bien tirantes, sujetos por dos puntos.

71. La regla. — Toma una cuartilla algo dura, o un cartón, y da un doblez en la misma. Este doblez es una recta.

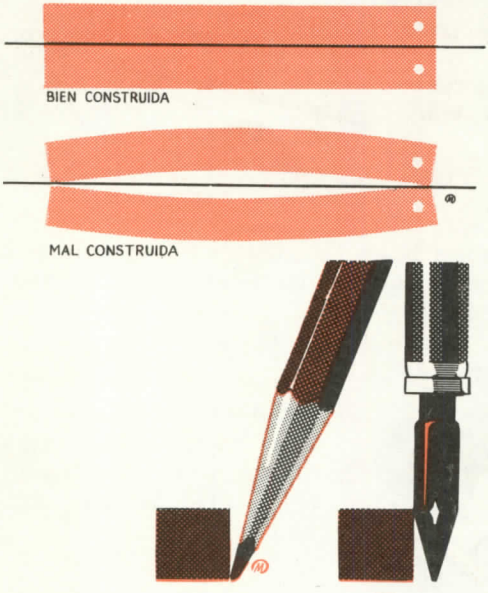
Coloca la cartulina doblada sobre una cuartilla y pasa la punta del lápiz por el doblez de modo que dibujes en la cuartilla una recta. Tienes así un medio sencillo para trazar rectas sobre una cuartilla sin necesidad de doblarla.



La cuartilla doblada la llamaremos **regla.**

EJEMPLOS. 1. Utiliza la regla que has construido para trazar diversas rectas en una cuartilla. Conviene que la uses durante varios días.

2. En el comercio se expenden reglas construidas en madera o plástico, a las que se da la forma indicada en la figura. Debes proveerte de una.



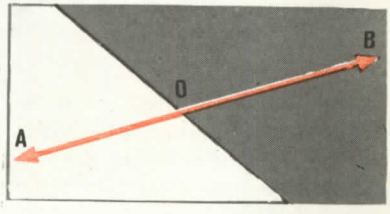
Has de comprobar primero si tu regla está bien construida. Para ello traza con ella una recta; inviértela y traza otra recta con los mismos extremos. Si ambas coinciden, está bien construida la regla. Si no coinciden, está mal construida, y hay que desecharla.

¿Qué propiedad has aplicado para esta comprobación?

Tracemos dos rectas, una con lápiz y otra con pluma. Cuidemos la colocación del lápiz, con la punta tocando la regla, y de la pluma, que ha de tocar a la regla por la parte más ancha.

72. La semirrecta. — Traza una recta en una cuartilla. ¿Cuántos semiplanos determina dicha recta? Colorea uno de ellos en gris, por ejemplo, y deja el otro en blanco.

Traza otra recta que corte a la anterior dentro de los límites de la cuartilla en el punto O, por ejemplo. Esta recta queda dividida por la anterior en dos partes, llamadas **semirrectas,** una situada en el semiplano gris y otra en el semiplano blanco.



Considera esta última. Observa que es ilimitada por uno de sus lados, el A; o sea, que puedes prolongarla tanto como lo desees. Para indicar esto se pone una flecha en dicho extremo. En cambio por el extremo O la semirrecta queda limitada: el punto O es el **borde** de la semirrecta OA, porque es lo que la limita. Podíamos decir que la semirrecta empieza en el punto O, y en cambio es ilimitada por el otro lado. Por esto el punto O se denomina también *origen* de la semirrecta OA.

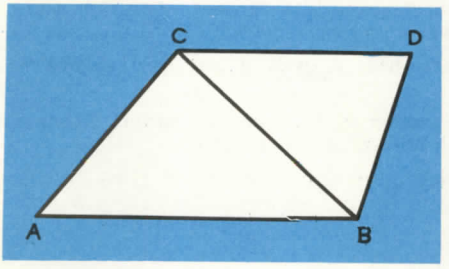
EJEMPLOS. 1. ¿Cuál es el origen de la semirrecta OB, y por qué colocamos una flecha en B?

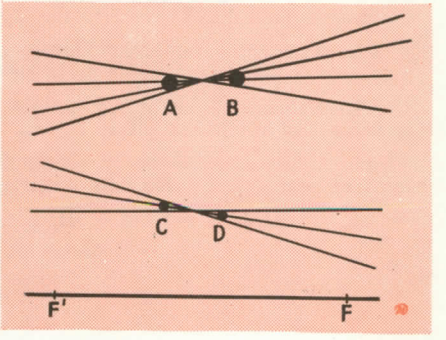
2. ¿Tienen algo de común las dos semirrectas OA y OB? Se llaman **opuestas.** *Semirrectas opuestas son las que tienen el mismo origen y están en la misma recta.*

3. Traza dos semirrectas que tengan el mismo origen, pero estén en rectas distintas. ¿Son opuestas?

EJERCICIOS

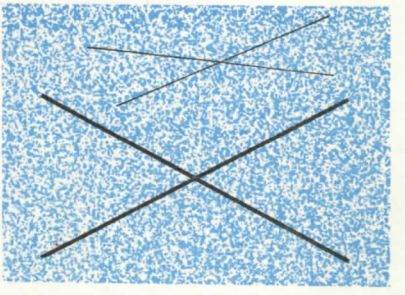
1. Nombra tres puntos en la figura 1.ª; nombra tres rectas, supuestas todas ilimitadas.





2. De la figura 2.ª deduce las condiciones para que en la práctica dos puntos determinen una recta.

3. De la figura 3.ª deduce las condiciones para que en la práctica dos rectas, al cortarse, tengan un solo punto común.



4. Si *a* y *b* son dos rectas, ¿qué significa la expresión

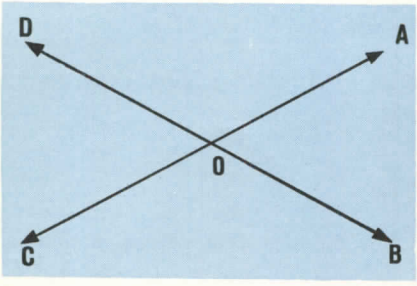
$$a \cap b = \{P\} ?$$

tomada de la notación seguida en la teoría de conjuntos.

5. ¿Sabrías trazar dos rectas que no tengan ningun punto común, por mucho que se prolonguen? ¿Cómo representarías este hecho con la notación adoptada en la teoría de conjuntos?

6. Traza dos rectas AC y BD, y considera las cuatro semirrectas OA, OB, OC y OD. ¿Cuál es la opuesta de la semirrecta OA?, ¿y de la OB?, ¿y de la OC?, ¿y de la OD?

7. Una recta tiene dos puntos en un plano. ¿Estará contenida en dicho plano?



8. Traza dos rectas que incidan o se corten en un punto H. ¿Por qué estas rectas no pueden cortarse en otro punto K?

9. Señala tres puntos A, B, C en una recta. Da tres nombres diferentes a la recta.

10. Traza tres rectas incidentes o concurrentes en un mismo punto A.

11. Traza tres rectas secantes dos a dos en tres puntos A, B y C.

12. Traza cuatro rectas secantes dos a dos y designa los puntos de intersección por A, B, C... ¿Cuántos puntos de intersección hay?

13. Traza dos rectas incidentes en A, después una tercera recta que corte a las otras dos fuera de la hoja de papel o del encerado.

14. Sobre una recta x y señala dos puntos A y B, y nombra las cuatro semirrectas obtenidas en la figura.

15. Sobre una recta x y señala tres puntos A, B, C en este orden. Nombra los tres segmentos y las seis semirrectas obtenidas en la figura.

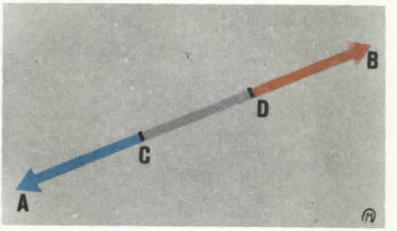
16. Traza tres puntos A, B, C. ¿Cuántas rectas determinan? (Dos casos).

15

Segmentos rectilíneos

73. Segmento rectilíneo. — Traza en tu cuartilla una recta AB y señala en ella dos puntos C y D. Considera las semirrectas CA y CB rayando esta última en rojo.

Considera también las semirrectas DA y DB, coloreando la primera de azul. De este modo aparece la recta dividida en tres porciones: una roja, otra azul y otra violeta, fusión del rojo y del azul.



A esta última porción le llamamos **segmento rectilíneo,** o simplemente **segmento.** Es un conjunto de puntos que resulta de la intersección de dos semirrectas: la roja CB y la azul DA. Le llamaremos *segmento CD.*

¿Cuál es el borde de dicho segmento, o sea, dónde queda limitado? En los dos puntos C y D, que se llaman **extremos** del segmento.

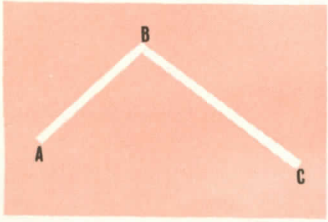
Ejemplos. 1. Señala en una cuartilla dos puntos P y Q y traza con la regla el segmento que los une.

2. En el segmento anterior PQ toma otros puntos distintos R, S, T, etc., y nombra los diversos segmentos que se forman.

3. En el segmento anterior PQ, ¿cuántos puntos puedes tomar? Por muchos puntos que hayas señalado, ¿puedes señalar siempre uno más?

Concluye que *un segmento tiene un número ilimitado de puntos, o sea tantos como se quiera.*

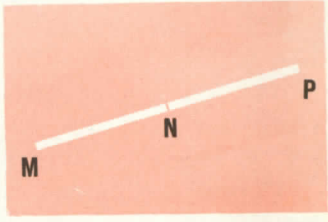
74. Segmentos concatenados. — Traza en tu hoja dos segmentos que tengan un extremo común y nada más en común.



Por ejemplo, los AB y BC de la figura, que tienen el extremo B común. Se les llama segmentos **concatenados.**

Ejemplos. 1. Si AB es concatenado de BC, ¿es BC concatenado de AB? Sí.

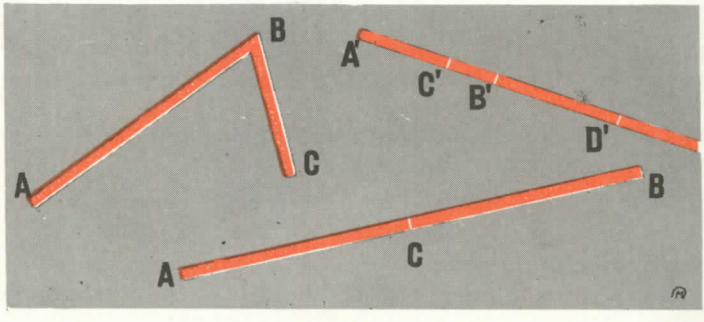
2. ¿Son concatenados los segmentos MN y NP de la figura? Para contestar, has de fijarte si cumplen la definición dada: tener un extremo común y nada más en común.



75. Segmentos consecutivos. — Los segmentos MN y NP de la última figura evidentemente son concatenados, porque tienen un extremo común, el punto N, y nada más en común. Pero es que, además de estas dos condiciones, cumplen una tercera: los dos segmentos están sobre la misma recta.

Dos segmentos que cumplen estas tres condiciones se llaman **consecutivos.**

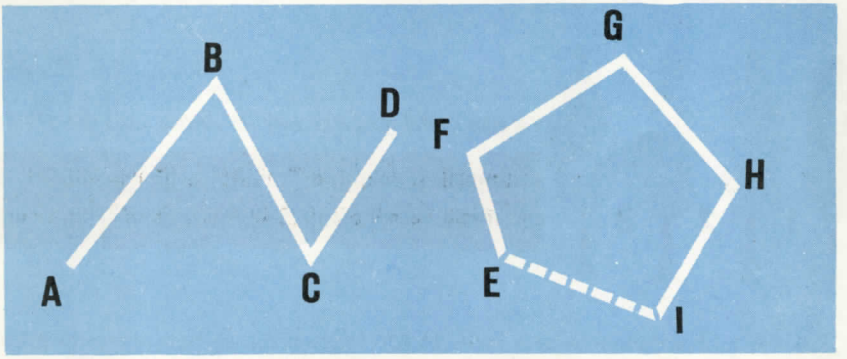
Ejemplos. 1. Traza en tu cuartilla dos segmentos consecutivos PQ y QR.



2. ¿Son consecutivos los segmentos AB y BC de la figura adjunta? ¿Lo son los A'B' y C'D'? Nombra en dicha figura tres segmentos consecutivos cada uno con el siguiente.

76. Línea poligonal. — Traza tres segmentos concatenados cada uno con el siguiente.

A la figura formada por los tres se le llama **línea poligonal.** Por ejemplo, la ABCD.



A cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal, se denomina **lado** de la misma, y a cada uno de sus extremos **vértice** de la misma.

Una línea poligonal puede ser de **dos lados,** de **tres lados,** de **cuatro lados,** etc.

EJEMPLOS. 1. Traza una línea poligonal de cuatro lados como la EFGHI. Nombra sus lados y sus vértices.

2. ¿Podrías añadir un lado más a la línea poligonal EFGHI, uniendo por un segmento los dos extremos I y E?

Entonces resulta una línea poligonal **cerrada** de cinco lados.

En cambio, la línea poligonal ABCD se dice que es **abierta.**

3. Da ejemplos de líneas poligonales abiertas y cerradas en la clase y en casa: borde de la pizarra, aristas, etc.

EJERCICIOS

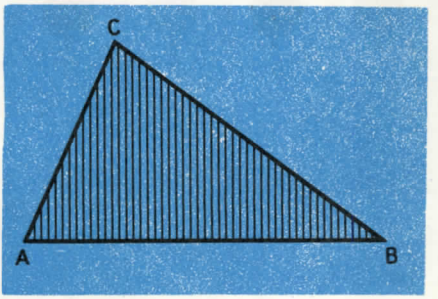
1. Construye una poligonal abierta y cuenta sus lados y sus vértices. ¿Qué diferencia hay entre el número de lados y el de vértices?

2. Traza una línea poligonal cerrada, y cuenta sus lados y sus vértices. ¿Es el mismo o distinto número?

3. Sobre un mapa de España haz itinerarios, diciendo cuáles son abiertos y cuáles cerrados.

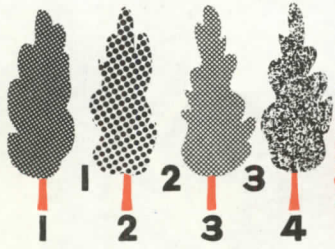
4. Nombra tres segmentos en la figura adjunta. Considera la línea poligonal que forman, y cuenta sus lados y sus vértices. ¿Es abierta o cerrada esta línea poligonal?

5. Traza dos segmentos MN y PQ de modo que se corten en un punto. Nombra dicho punto.



6. En un lado de un camino se ha plantado una hilera de 60 arbolitos, a 4 m uno de otro. ¿Qué distancia separa el primero del último?

Observa en el gráfico que *en una línea abierta hay un árbol más que espacios.*

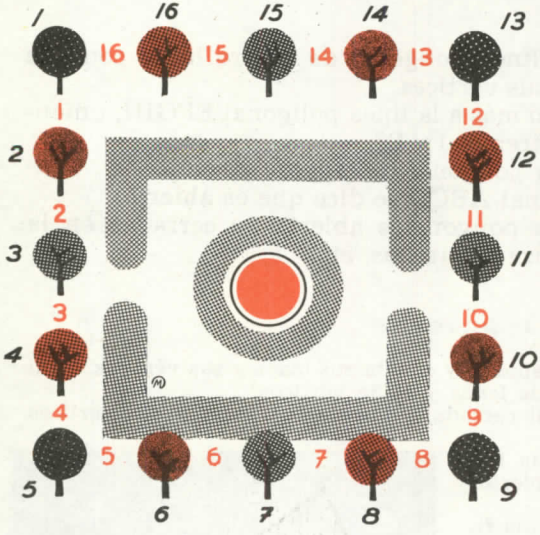


EN UNA LINEA ABIERTA HAY UN ARBOL MAS QUE ESPACIOS

Número de árboles = número de espacios + uno
Número de espacios = número de árboles — uno

7. A ambos lados de una calle de 690 m de larga se han plantado árboles a 5 metros de distancia uno de otro. ¿Cuántos árboles lleva la calle?

8. Entre dos árboles que están a 64 metros uno de otro, se quiere plantar una hilera de ellos que estén a 4 metros cada uno del siguiente y de los dos de los extremos. ¿Cuántos árboles hay que plantar?



9. Alrededor de un campo cuadrado de 360 metros de contorno se han plantado árboles a 6 metros uno de otro, y habiendo uno en cada vértice. ¿Cuántos árboles se plantaron?

Observa en el gráfico que *en una línea cerrada hay tantos árboles como espacios.*

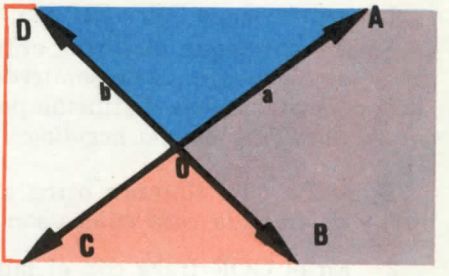
10. El contorno de una finca mide 864 metros. ¿Cuántas estacas plantaremos a su alrededor, si distan 2 metros una de otra?

16

Angulos

77. Región angular. — En una cuartilla traza una recta b, borde de dos semiplanos. Colorea de azul uno de ellos, dejando el otro en blanco.

Traza otra recta a que corte a la anterior dentro de los límites de la cuartilla. Colorea de rojo uno de los semiplanos que determina esta segunda recta, dejando el otro en blanco.



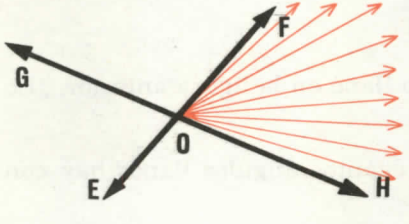
Así obtienes cuatro regiones: la **blanca,** intersección de los dos semiplanos blancos; la **azul,** intersección del semiplano azul y el blanco de borde a; la **violeta,** intersección del semiplano azul y del rojo; la **roja,** intersección del semiplano rojo con el blanco de borde b. Cada una de dichas regiones se llama **región angular.**

Considera la región angular violeta. ¿Cuál es su borde? Son las dos semirrectas OA y OB, que se llaman **lados** de la región. Ambas semirrectas tienen el mismo origen O, al que se denomina **vértice** de la región.

Esta región violeta la nombraremos «región AOB», poniendo siempre en medio la letra del vértice.

EJEMPLOS. 1. Di cuáles son los lados y el vértice de las regiones angulares blanca, roja y azul. Nombra dichas regiones.

2. Las cuatro regiones angulares de la figura anterior, ¿tienen el mismo vértice? ¿Cuál es? Es el punto O.



78. Ángulo convexo.— Toma una cuartilla y traza en ella dos rectas EF y GH que se corten dentro del papel. Dentro de la región angular FOH traza unas cuantas semirrectas que tengan como origen el punto O. Hazlo con el lápiz rojo.

¿Podrás trazar siempre alguna más? ¿Cuántas semirrectas puedes trazar en estas condiciones?

Al conjunto ilimitado de semirrectas con origen O que puedes trazar en la región angular FOH, incluidos los dos lados OF y OH, se llama **ángulo convexo** FOH, y se representa así:

$$\widehat{FOH}$$

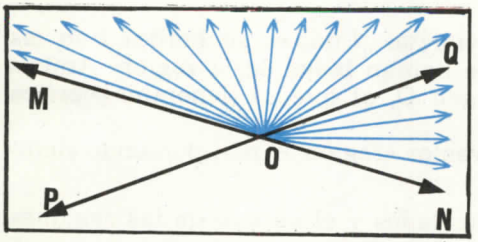
poniendo siempre en medio la letra del vértice.

Las semirrectas OF y OH son los **lados** del ángulo, y O su **vértice.**

Es necesario que distingas entre *región angular*, conjunto de puntos, y *ángulo*, conjunto de semirrectas con el mismo origen. Más adelante necesitarás esta distinción para adquirir idea exacta de lo que es *ángulo positivo* y *ángulo negativo*.

EJEMPLOS. 1. Nombra otros ángulos convexos en la figura anterior, y di en cada caso cuáles son sus lados y su vértice.

2. En el $\widehat{GOF}$ traza con el lápiz verde unas cuantas semirrectas. Otras con lápiz azul en el $\widehat{GOE}$, y otras con lápiz violeta en el $\widehat{EOH}$. Entonces podemos hablar de ángulo rojo, ángulo azul, ángulo verde y ángulo violeta.



79. Ángulo llano. — Como en los párrafos anteriores, traza dos rectas MN y PQ. En las regiones angulares MOQ y QON traza con lápiz rojo cuantas semirrectas puedas con origen en O. Comprendes que se pueden trazar todas las que se quieran.

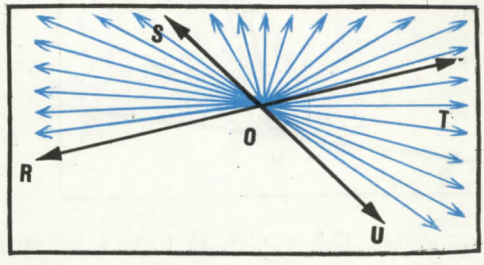
A este conjunto de semirrectas contenidas en dos regiones angulares consecutivas se denomina **ángulo llano,** y se representa así

$$\widehat{MON}$$

EJEMPLOS. 1. Nombra otro ángulo llano en la figura anterior. ¿Lo es el $\widehat{MON}$ blanco? Sí.

2. ¿Es llano el ángulo $\widehat{POQ}$? ¿Y cuántos ángulos llanos hay con este nombre? Son dos ángulos llanos.

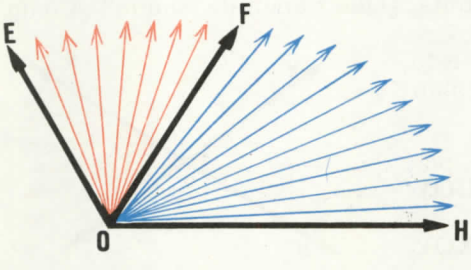
80. Ángulo cóncavo. — Traza todas las semirrectas que puedas en tres de las regiones angulares de la figura, todas con origen en el vértice O. El conjunto de todas las semirrectas que se pueden trazar en estas condiciones constituye un **ángulo cóncavo.**



Al conjunto formado por todas las semirrectas de un plano de origen O se le llama **ángulo completo.**

EJEMPLOS. 1. ¿Cuántos ángulos forma la semirrecta OT con las otras tres semirrectas OS, OR y OU? Dos con cada una; en total, 6.

2. ¿Qué diferencias existen entre los ángulos convexos y los ángulos cóncavos? Los primeros están totalmente contenidos en un mismo semiplano cuyo borde es la recta que contiene a uno de sus lados. Los segundos, no. Puedes utilizar para ello el borde de la mesa.

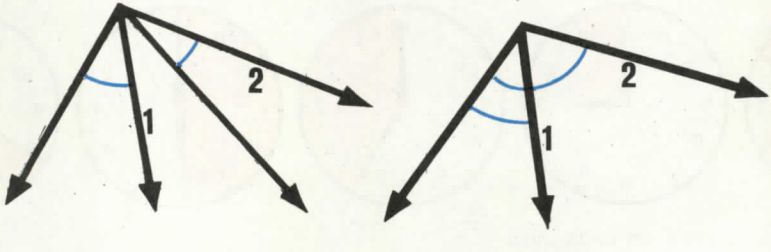


81. Ángulos consecutivos. Coloca uno al lado del otro el ángulo rojo y el ángulo azul que dibujaste en el párrafo 78, de modo que tengan el vértice y un lado común y se hallen en distinto semiplano respecto de la recta que contiene el lado común.

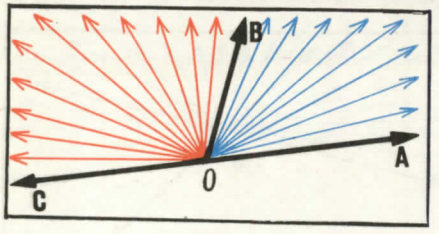
En esta posición los dos ángulos se llaman **consecutivos.**

EJEMPLOS. 1. El ángulo HOE de la figura anterior, ¿es convexo o cóncavo? Es convexo.

2. ¿Son consecutivos los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ de las figuras adjuntas? No.



82. Ángulos adyacentes. — En tu cuartilla dibuja dos ángulos como los AOB y BOC de la figura adjunta. ¿Son consecutivos? Observa para ello si cumplen la definición dada en el párrafo anterior. Tienen un lado común y nada más en común. Luego son consecutivos.



Pero en este caso cumplen una tercera condición: los lados no comunes son semirrectas opuestas, OA y OC. Entonces los ángulos se llaman **adyacentes.**

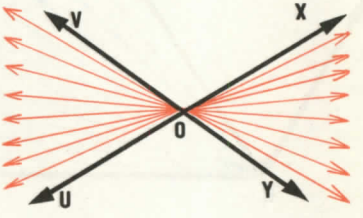
EJEMPLOS. 1. Da en la clase ejemplos de ángulos adyacentes: ventanas, puertas de dos hojas, etc.

2. En la figura anterior, ¿cómo es el ángulo AOC que está sin colorear? Es un ángulo llano.

3. De dos ángulos adyacentes, ¿puede ser cóncavo alguno de ellos? No.

83. Ángulos opuestos por el vértice. — Considera los dos ángulos XOY y UOV de la figura adjunta. ¿Qué tienen de común? ¿Cómo son sus lados?

Son *semirrectas opuestas*. Por esto los ángulos considerados se llaman **opuestos por el vértice.**

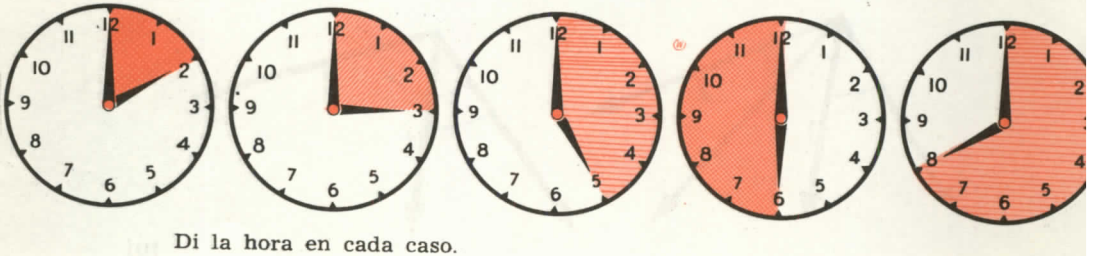


EJEMPLOS. 1. ¿Son opuestos por el vértice los ángulos XOV y UOY de la figura? Sí.

2. ¿Cómo son los ángulos XOY y XOV de la figura? Son adyacentes.

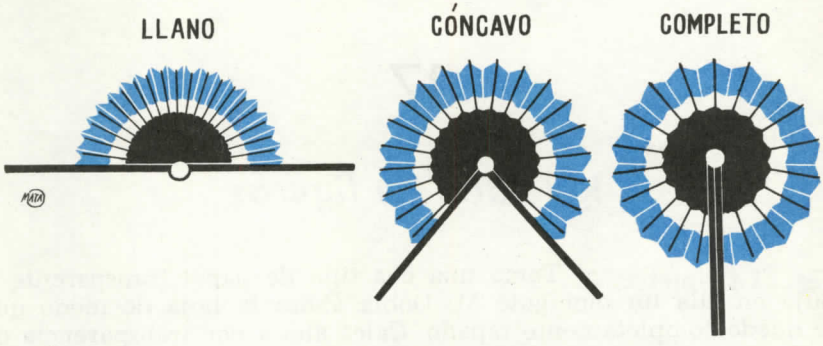
EJERCICIOS

1. ¿Qué clase de ángulo forman un bastón vertical y su sombra?
2. ¿Qué clase de ángulos forman las agujas del reloj en los siguientes casos?



Di la hora en cada caso.

3. Con un abanico japonés forma los ángulos siguientes:



4. Contando las horas de 0 a 24 horas, expresa las horas siguientes después del mediodía: 1 h. 15 mn.; 2 h. 30 mn.; 4 h. 45 mn.; 8 h. 20 mn.; 10 h. 30 mn.; 11 h. 50 mn.

5. ¿A qué hora después del mediodía corresponde: 16 h.; 18 h. 30 mn.; 21 h. 45 mn.; 13 h. 50 mn.; 23 h. 50 mn.; 18 h. 10 mn.?

6. El 1.º de enero de un año es martes. ¿Qué día de la semana es el 31 de diciembre del mismo año? (Dos posibilidades).

7. De una parada de autobuses parte uno cada 18 mn. Cada autobús vuelve a esa parada 1 h. 30 mn. después de su partida. ¿Cuántos autobuses se necesitan para asegurar el servicio de esta línea de autobuses?

8. Un reloj adelanta 1 mn. 15 s. por día. Se le pone a la hora un domingo al mediodía. ¿Qué hora indicará el domingo siguiente al mediodía?

9. A un reloj se le pone a la hora el 15 de junio al mediodía. El 15 de julio al mediodía señala 11 h. 50 mn. ¿Cuánto retrasa por día?

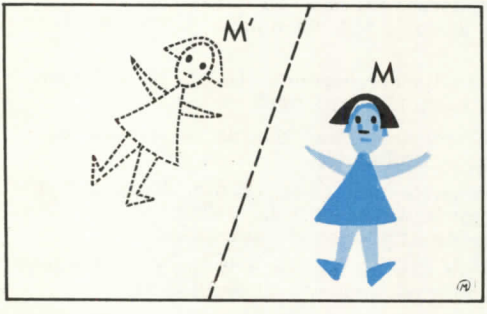
10. En un lugar, el 1.º de abril sale el sol a las 5 h. 31 mn. y se pone a las 18 h. 19 mn. ¿Durante cuánto tiempo ha permanecido encima del horizonte?

11. Un avión emplea 7 h. 15 mn. para ir desde Madrid a New York con dos escalas.
1.º Sale de Madrid a las 0 h. 35 mn. ¿Qué hora será en Madrid cuando el avión llegue a New York?
2.º La hora de New York retrasa 6 horas respecto de la de Madrid. ¿Qué hora será en New York cuando el avión llegue allí?

17

Igualdad de figuras

84. La simetría. — Toma una cuartilla de papel transparente y dibuja en ella un monigote M. Dobla ahora la hoja de modo que éste quede completamente tapado. Calca ahora por transparencia en la parte superior de la hoja el monigote que queda en la parte inferior. Así obtienes el dibujo M'. Al desdoblar la copia aparece en distinta cara que la figura original. Por eso la dibujamos en línea de puntos.



Las dos figuras M y M' se llaman **simétricas:** M' es simétrica de M, y ésta lo es de aquélla.

El doblez que hemos dado se llama **eje de simetría.** La operación realizada para obtener una figura a partir de la otra se denomina **simetría.**

La figura inicial M se llama **original** y su copia M' se llama **imagen,** lo mismo que en las correspondencias entre conjuntos.

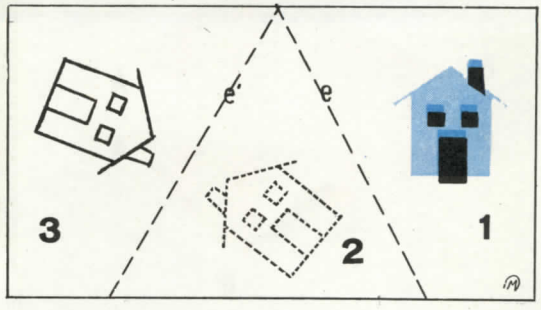
EJEMPLOS. 1. Dibuja un punto, y halla su simétrico respecto de un eje dado.

2. Dibuja una recta y su simétrica respecto al eje anterior. ¿Dónde se cortan las dos rectas? En un punto del eje.

3. Halla el simétrico de un segmento. ¿Es otro segmento? Sí.

85. Producto de simetrías. — Dibuja la figura 1 en tu hoja de papel transparente. Halla su simétrica respecto al eje e, calcando por transparencia. Obtienes así la figura 2. Halla ahora la simétrica de ésta respecto al eje e', obteniéndose la figura 3.

¿Están las figuras 1 y 3 en la misma o en distinta cara? Decimos que hemos pasado de la figura 1 a la figura 3 mediante la **transformación producto de las simetrías** de ejes e y e'.



La figura 3 es la **transformada** de la figura 1 en el producto de las simetrías de ejes e y e'.

EJEMPLOS. 1. Dados dos ejes e y e', halla la transformada de una recta r en la transformación producto de las simetrías de ejes e y e'. ¿Es otra recta?

2. Dibuja tres ejes de simetría y un segmento. Halla el transformado del mismo en el producto de las tres simetrías. ¿Aparecerá dicho transformado en la misma o en distinta cara que el segmento original?

86. Los movimientos en el plano. — Llamaremos **movimientos** a las transformaciones producto de cualquier número de simetrías. En particular, una única simetría se llama también movimiento.

El producto de un número par de simetrías se llama **movimiento directo.** Entonces las figuras transformada y original están dibujadas en la misma cara del papel.

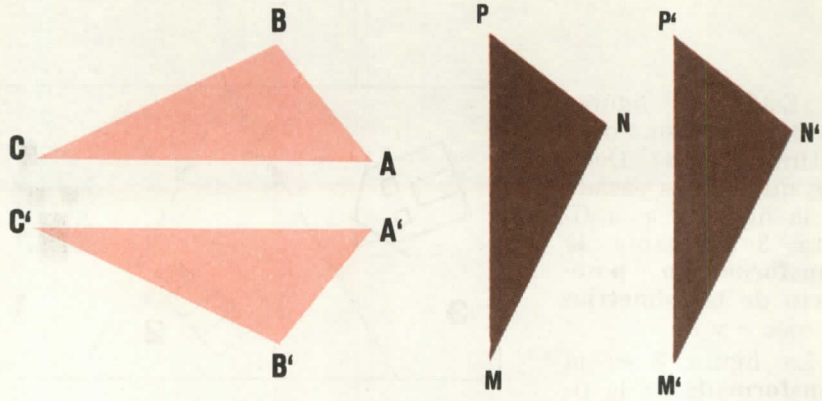
El producto de un número impar de simetrías se llama **movimiento inverso.** Entonces las figuras transformada y original aparecen dibujadas en distinta cara del papel.

87. Igualdad de figuras. —Diremos que dos figuras son **iguales** cuando se pueden superponer mediante un movimiento; o sea, existe un movimiento que transforma una en otra.

Dos figuras son **directamente iguales** cuando se pueden superponer mediante un movimiento directo.

Dos figuras son **inversamente iguales** cuando se puede pasar de una a otra con un movimiento inverso.

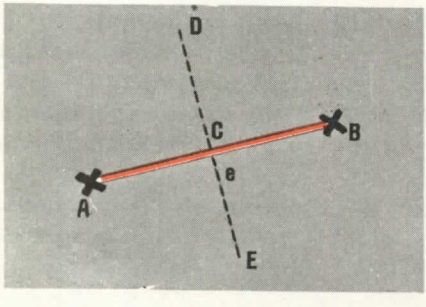
EJERCICIOS. 1. ¿Son directa o inversamente iguales las dos figuras dibujadas en *a*)? ¿Y las dibujadas en *b*)?



a) *b*)

2. ¿Con cuántas simetrías podrías superponer las dos figuras de *a*)? ¿Y con cuántas las de *b*)? Las de *a*) se pueden superponer con una simetría: son figuras inversamente iguales; las de *b*) se pueden superponer con dos simetrías: son figuras directamente iguales.

88. Mediatriz de un segmento. — En una hoja de papel transparente señala dos puntos A y B. ¿Podrías encontrar un movimiento que transforme uno en otro? Compruebas que fácilmente puedes doblar el papel de modo que un punto se superponga sobre el otro, y entonces das el doblez.



Has encontrado una simetría que superpone un punto sobre el otro. Luego **dos puntos son siempre iguales,** pues existe un movimiento que transforma uno en otro.

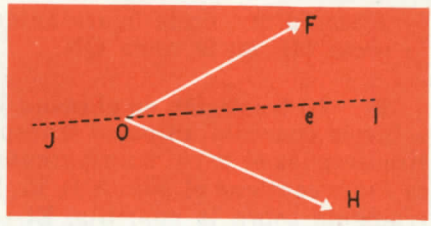
Desdobla el papel y fíjate en el eje de la simetría, o doblez que has dado en la hoja: corta al segmento AB en un punto C, que divide al segmento en dos trozos iguales, pues se superponen en el doblado.

Al punto C se le llama **punto medio** del segmento AB, y se dice que *divide a dicho segmento en dos segmentos iguales.* Al eje de simetría *e* se le llama **mediatriz** del segmento AB.

EJEMPLOS. 1. Divide por doblado el segmento AB en cuatro partes iguales. Para ello divídelo primero en dos, y luego cada una en otras dos partes iguales.

2. Sabrías decir cómo son los ángulos $\widehat{BCD}$ y $\widehat{ACD}$ en la figura anterior?

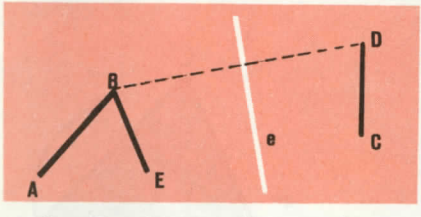
89. Bisectriz de un ángulo. — Dibuja dos semirrectas OF y OH con el mismo origen O. ¿Sabrías encontrar un movimiento que transforme una en otra? Dobla con cuidado de modo que el doblez pase por el vértice O y que un lado del ángulo coincida con el otro. Has encontrado una simetría que superpone una semirrecta sobre la otra. Luego **dos semirrectas con el mismo origen son siempre iguales,** pues existe un movimiento que transforma una en otra.



Desdobla el papel y fíjate en el eje de simetría *e*. Consta de dos semirrectas: la OI, que está en el interior del ángulo convexo FOH, por lo que se le llama **bisectriz del ángulo convexo** FOH, y la OJ, que está situada en el ángulo cóncavo FOH y lo divide en dos partes iguales, por lo que se le denomina **bisectriz del ángulo cóncavo** FOH.

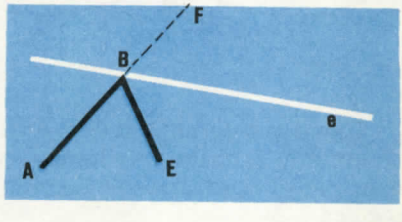
EJEMPLOS. 1. Divide el ángulo FOH en cuatro partes iguales, dividiéndolo primero en dos, y luego cada una en otras dos partes iguales.

2. Dados dos segmentos AB y CD, construye un segmento BE concatenado con AB e igual al CD. Para ello dobla el papel de modo que el punto D coincida con B. Entonces el segmento DC toma la posición BE. Cálcalo y este segmento resuelve el problema.

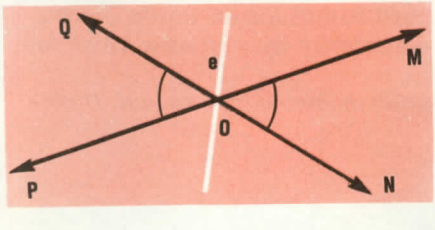


¿Tiene otra solución este problema?

3. En el ejemplo anterior ¿qué harías para lograr que el segmento BE sea consecutivo del AB? Bastaría hacer una simetría respecto al eje *e*. ¿Qué es este eje respecto del ángulo FBE?



90. Propiedades de los ángulos opuestos por el vértice. — Considera los ángulos opuestos por el vértice MON y POQ. En lugar de trazar en su interior semirrectas, en adelante trazaremos en su interior un pequeño arco, como se indica. ¿Podrías encontrar un movimien-

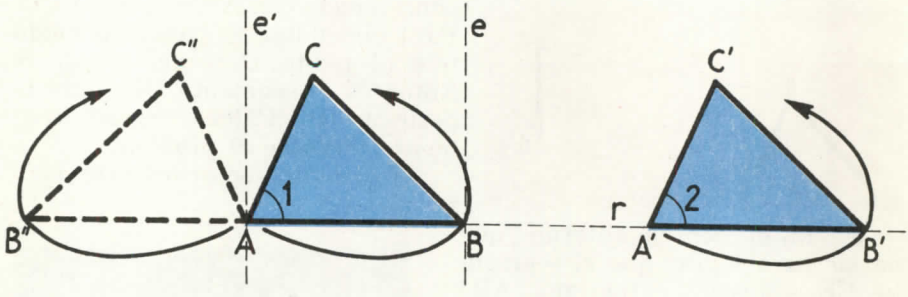


to que superponga uno sobre otro? Basta doblar por el eje *e*, bisectriz de MOQ. Luego **los ángulos opuestos por el vértice son iguales.**

EJEMPLO. — ¿Son iguales entre sí todas las rectas?

Observa que en la figura anterior, la simetría de eje *e* transforma la recta MP en la recta QN.

91. La traslación en el plano. — Dibuja un triángulo ABC. Coloca sobre la cuartilla un papel transparente y calca dicho triángulo. Desliza después el papel transparente en la dirección marcada por la recta *r* que contiene el lado A B. En la nueva posición A′ B′ C′, calca este triángulo sobre la cuartilla. El triángulo A B C se ha transformado así en el triángulo A′ B′ C′. Vamos a demostrar que esta transformación es un *movimiento directo*. En efecto, dobla la cuartilla de modo que A′ caiga sobre A. Esta simetría, cuyo eje es la recta e, transforma el triángulo A′ B′ C′ en el A C″ B″. Dobla de nuevo por la recta e′. Verás que B″ caerá en B y C″ coincidirá con C. Se ha logrado la superposición de los dos triángulos mediante un producto de dos simetrías, o sea mediante un movimiento directo.



Las dos figuras A B C y A′ B′ C′ tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales, y además están colocados en ambas en el mismo sentido: el contrario de las agujas del reloj. Son figuras *directamente iguales*.

Las dos figuras A B C y A B″ C″, en cambio, son *inversamente iguales*: tienen sus elementos iguales, pero colocados en orden contrario. Son transformadas una de otra mediante un movimiento inverso, o sea mediante una simetría.

Dos triángulos o dos polígonos cualesquiera homólogos en una traslación son directamente iguales.

EJERCICIOS

1. Traza un triángulo en papel transparente, o corta un triángulo en papel ordinario. Pliégalo de modo que se formen ejes de simetría para cada lado del triángulo. Expresa, y procura explicar todo lo que observes.

2. Considera el conjunto $\alpha = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M; N; O, P, Q, R, S, T; U, V, W, X, Y, Z\}$.

a) Halla el conjunto β de las letras mayúsculas del alfabeto que son simétricas respecto de una recta vertical, o sea que admiten un eje de simetría vertical.

b) Halla el conjunto γ, subconjunto del α, formado por las letras que tengan un eje de simetría horizontal.

c) Halla el conjunto $\beta \cap \gamma$.

3. Traza un triángulo en un papel transparente. Traza por doblado las bisectrices de los tres ángulos de dicho triángulo. ¿Qué observas acerca de las tres bisectrices?

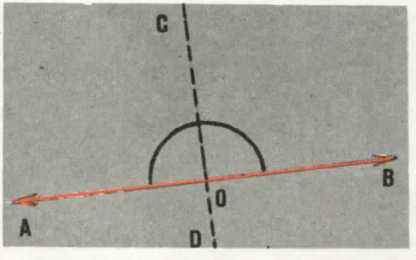
4. Un objeto se refleja en un espejo. ¿Sabrías decir cómo son el objeto y su imagen respecto del espejo?

5. ¿Cómo son los ángulos que una recta y su simétrica forman con el eje de simetría?

18

Rectas perpendiculares

92. Ángulo recto. — Traza una recta AB, y toma en ella un punto O. Sean OA y OB las dos semirrectas que así resultan. Dobla la cuartilla transparente de modo que el doblez pase por O y OA se superponga sobre OB. Los ángulos AOC y BOC tienen dos propiedades:



1.ª **Son adyacentes.**

2.ª **Son iguales.**

Se llaman **ángulos rectos.**

Ángulo recto es el que es igual a uno de sus adyacentes.

El ángulo recto es la unidad natural de ángulos. No es necesario conservarla en los Museos u Oficinas de Pesas y Medidas, con todo cuidado para que no se altere. Cualquier niño puede construirlo con toda exactitud con un sencillo doblez en el momento que se necesite.

Las dos rectas AB y CD de la figura anterior se dice que son **perpendiculares.** Es decir, *rectas perpendiculares son aquellas que al cortarse forman ángulos rectos.*

Ejemplos. 1. ¿Cómo son los ángulos AOD y BOD de la figura anterior? Son adyacentes e iguales, luego rectos.

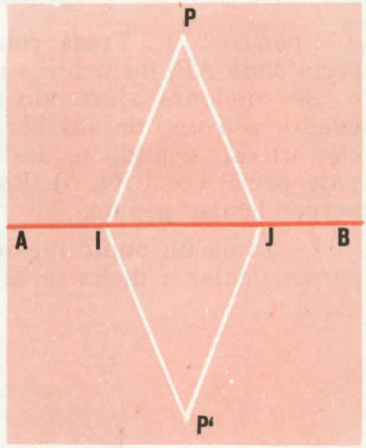
2. Un ángulo llano, ¿cuántos ángulos rectos mide? ¿Y un ángulo completo? El ángulo llano mide 2 rectos, y el completo, 4 rectos.

3. Traza un ángulo que mida 3 ángulos rectos. ¿Es convexo o cóncavo? Es cóncavo.

93. Propiedad de las rectas perpendiculares a una recta dada. — Dibuja en papel transparente una recta AB. Toma dos puntos I y J

sobre ella y traza por doblado rectas perpendiculares a AB en cada uno de ellos. Estas dos rectas no pueden tener ningún punto común por mucho que se prolonguen.

En efecto, supón que estas dos rectas tienen un punto común P. Doblando la cuartilla por AB y calcando el punto P en P′, tendríamos que los ángulos en I y en J son rectos. Las semirrectas IP e IP′ son opuestas, y lo mismo JP y JP′. Luego las rectas PP′ tendrían dos puntos comunes y no serían distintas.

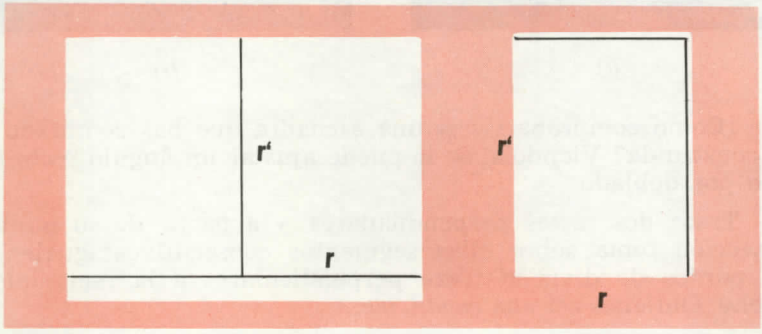


EJEMPLOS. 1. Dibuja una recta a y un punto A en ella. Construye por doblado una recta incidente con A y perpendicular a a. ¿Podrías trazar más de una?

2. Dibuja una recta b y un punto B no incidente a ella. Construye por doblado una recta perpendicular a b e incidente con B. ¿Podrías trazar más de una?

La perpendicular a una recta desde un punto es única.

94. La escuadra. — Toma un trozo de cartón o cartulina. Traza en ella una recta r y recorta con la tijera a lo largo de la misma. Traza una recta r' perpendicular a r. Dobla por r. Tienes así un instrumento, llamado **escuadra** o **cartabón**, que podrás emplear en ade-



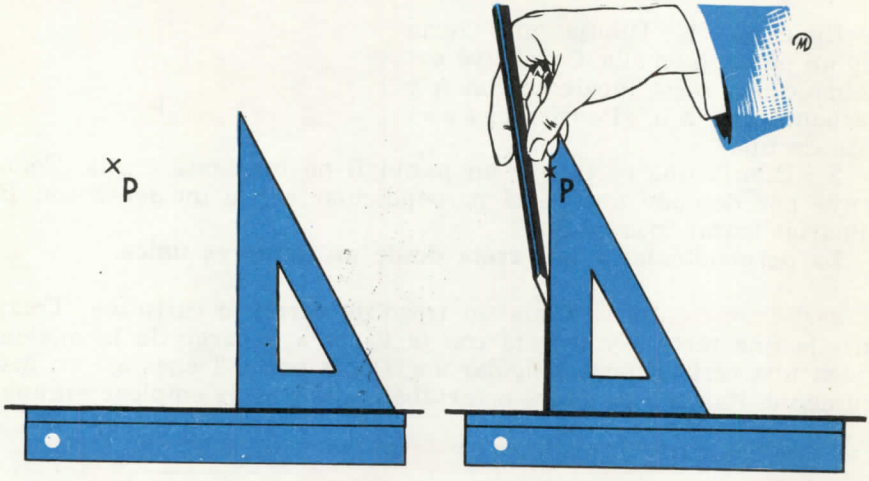
lante para construir ángulos rectos y trazar perpendiculares a rectas dadas, con sólo aplicar el borde r sobre la recta dada y pasar el lápiz sobre el borde r', de modo que quede marcado en el papel. En el

Comercio se expenden escuadras de materiales plásticos o de madera, y suelen tener la forma indicada en la figura siguiente.

Ejemplos. 1. Traza con la escuadra una perpendicular a una recta dada AB, incidente a un punto dado P.

Se comienza ajustando una regla sobre la recta AB y una escuadra con uno de sus bordes sobre la regla, como indica la posición *a*). En seguida se desliza la escuadra hasta que el otro borde pase por P (posición *b*). Entonces se traza la recta PC, que será la perpendicular pedida.

2. Toma un punto incidente con la recta AB, y traza por él una perpendicular a dicha recta AB, utilizando la escuadra.



a) *b*)

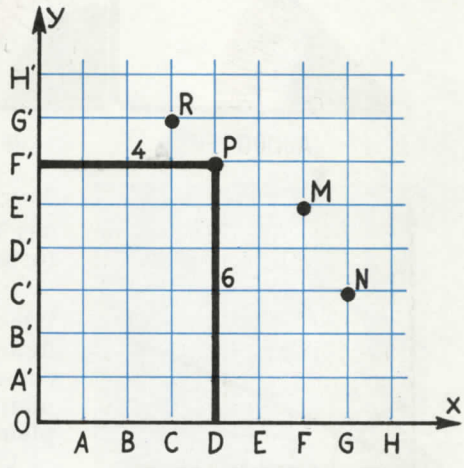
3. ¿Cómo comprobarías si una escuadra que has comprado está bien construida? Viendo si se le puede ajustar un ángulo recto construido por doblado.

4. Traza dos rectas perpendiculares, y a partir de su punto de intersección toma sobre ellas segmentos consecutivos iguales. Por estos puntos de división traza perpendiculares a la recta que los contiene. Obtienes así una *cuadrícula*.

95. La cuadrícula. — Traza un ángulo recto X O Y. Construye a continuación mediante regla y escuadra, una red de paralelas equidistantes, tomando sobre O X segmentos consecutivos iguales O A =

$= AB = BC = CD =$ etc., y trazando por los puntos de división paralelas a OY.

Toma ahora sobre OY segmentos iguales a los primeros $OA' = A'B' = B'C' = C'D' =$ etcétera, y traza por los puntos de división paralelas a OX.



Has construido así una **cuadrícula.** Si AB mide 1 cm., se dice que la cuadrícula es «*al centímetro*», y la figura contiene un gran número de cuadrados contiguos cuyos lados miden 1 centímetro.

Si AB mide 1 mm., la cuadrícula es «*al milímetro*», y se dice que se ha construido un *papel milimetrado.*

En el comercio se venden hojas de papel milimetrado ya preparadas.

Si la cuadrícula es «al centímetro», por ejemplo, cada nudo de la red viene representado por dos números que miden sus distancias a OY y a OX, respectivamente. Así el nudo P viene dado por los números 4 y 6. Al primero se le llama *abscisa*, y al segundo, *ordenada.* Se escribe P (4, 6). Los dos números, en conjunto, se llaman *coordenadas* de P. El número 4 es la abscisa, y el número 6 es la ordenada. Al nombrar las coordenadas de un punto, se da siempre primero la abscisa.

¿Cuáles son las coordenadas de los nudos M, N, R?

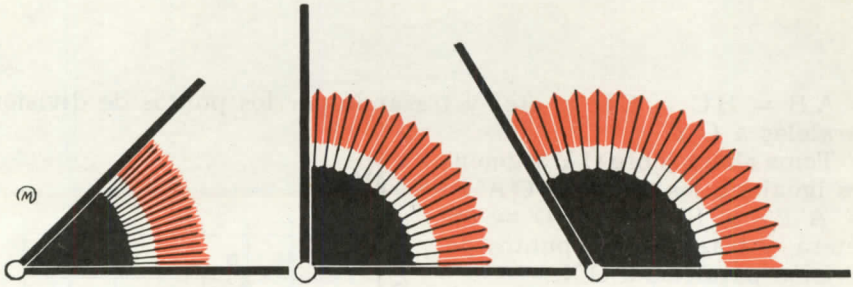
Ejemplos. 1. En papel cuadriculado representa el conjunto Z de puntos A (0,5), B (2,5), C (4,5), D (2,3), E (0,1), F (2,1) y G (4,1). Observa que uniendo dichos puntos con segmentos de recta en el mismo orden en que se han dado, has dibujado una Z.

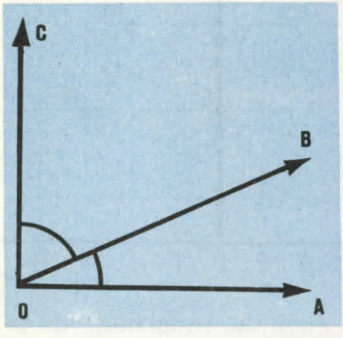
2. En papel cuadriculado señala los puntos (1,1), (2,3), (3,5), (4,3), (5,1) y (3,3). ¿Qué letra mayúscula del alfabeto sugiere este conjunto de puntos?

3. Sugiere las coordenadas del punto medio entre los puntos (3,0) y (3,1).

96. Ángulos agudos y obtusos. — Construye un ángulo que pueda colocarse enteramente dentro de un ángulo recto. Se le llama **agudo.**

Construye otro ángulo dentro del cual pueda colocarse por entero un ángulo recto. Se le denomina **obtuso.**



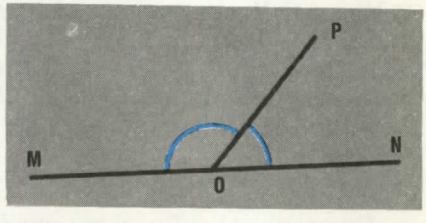


EJEMPLOS. 1. Con el abanico japonés forma ángulos agudos, rectos y obtusos.

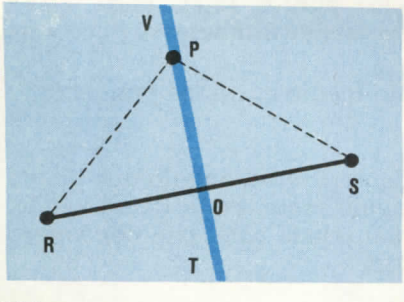
2. Construye dos ángulos agudos tales que, como los AOB y BOC de la figura, colocados en forma que sean consecutivos, sus lados no comunes forman un ángulo recto. Se les llama **complementarios.**

Cada uno es el *complementario* del otro, o sea lo que le falta al otro para valer un recto.

3. Construye dos ángulos adyacentes, de los cuales uno sea agudo. ¿Cómo es el otro? Se les llama **suplementarios.** Cada uno es el suplemento del otro, o sea lo que le falta para valer un llano.



97. Propiedad de la mediatriz de un segmento. —En papel transparente traza un segmento RS y, por doblado, su mediatriz. ¿Cómo son los ángulos en O? Luego *la mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo en su punto medio.*



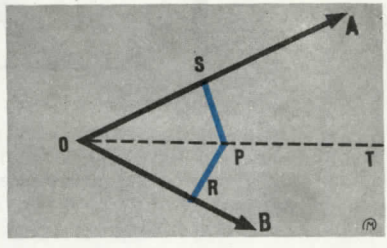
Toma un punto cualquiera P de la mediatriz y únelo con los extremos R y S del segmento. ¿Cómo son los segmentos RP y SP que así se obtienen?

Se superponen en el doblado; luego son iguales.

Uniendo cualquier punto de la mediatriz de un segmento con los extremos del mismo se obtienen dos segmentos iguales.

98. Propiedad de la bisectriz de un ángulo. — En papel transparente traza un ángulo AOB, y, por doblado, su bisectriz. Toma un punto cualquiera P de ésta, y traza desde él las perpendiculares PS y PR a los lados del ángulo. Utiliza para ello la escuadra.

Al punto de intersección de la perpendicular a una recta con dicha recta se denomina **pie** de la perpendicular.



Considera los segmentos PS y PR de las perpendiculares que has trazado comprendidos entre el punto P y los pies respectivos. ¿Cómo son dichos segmentos? Se superponen al doblar por la bisectriz. Luego son iguales.

Observa que no podía ser de otra forma, pues en el doblado se superponen los lados OA y OB del ángulo, y de no coincidir los segmentos PR y PS tendríamos dos perpendiculares a la misma recta desde el punto P.

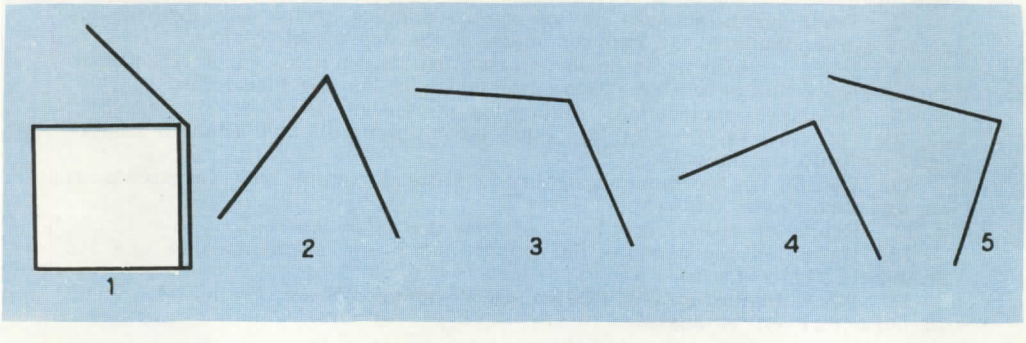
Los segmentos de perpendicular trazados desde un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo a los lados del mismo, y comprendidos entre el punto y los pies respectivos, son iguales.

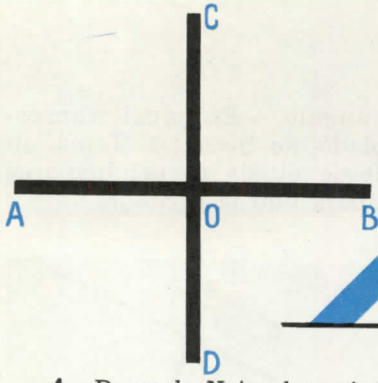
EJERCICIOS

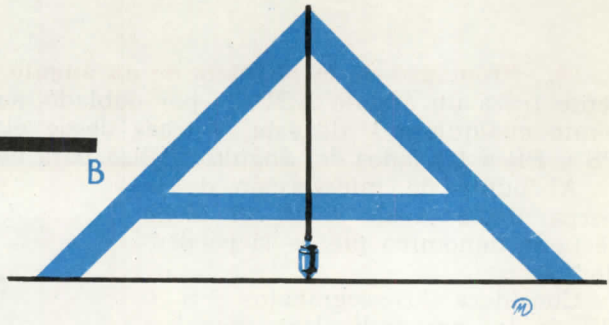
1. Si dos ángulos son suplementarios, ¿pueden ser ambos obtusos? ¿Y pueden ser ambos agudos? Da la razón.

2. ¿Cuál es el suplemento de un ángulo recto?

3. ¿Qué clase de ángulos son los de la figura? Si es necesario, ajusta la esquina de una hoja de papel al ángulo, como se ha hecho en 1.

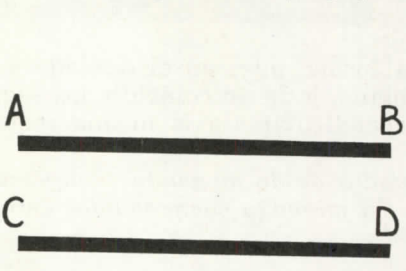


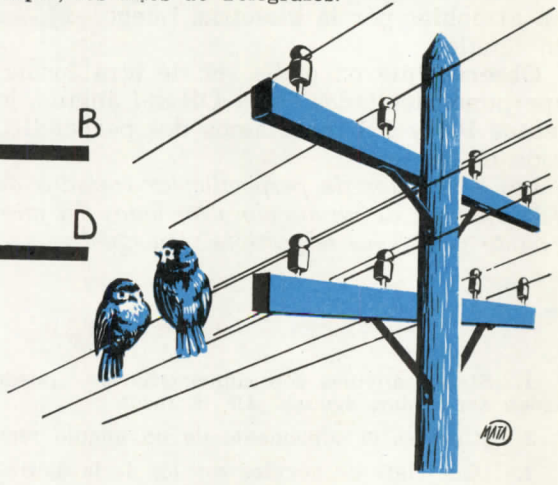




4. Da en la Naturaleza ejemplos de rectas perpendiculares. Por ejemplo, la plomada y el nivel de albañil. Da otros ejemplos en la clase.

5. Da ejemplos de rectas que no tienen ningún punto común, por mucho que se prolonguen. Por ejemplo, los hilos de Telégrafos.





Da otros ejemplos.

6. Traza la bisectriz de un ángulo llano. ¿Cómo son los dos ángulos que resultan?

7. Traza las bisectrices de los cuatro ángulos rectos que forman dos rectas perpendiculares. ¿Cómo son entre sí las dos bisectrices?

8. Traza las bisectrices de los cuatro ángulos convexos que forman entre sí dos rectas que se cortan. ¿Cómo son entre sí las dos bisectrices?

9. En papel cuadriculado señala los puntos (2, 1) , (2, 3) , (2, 5) , (3, 3) , (4, 3) , (4, 1) y (4, 5). ¿Qué letra mayúscula del alfabeto sugiere este conjunto de puntos?

10. Escribe las coordenadas de un conjunto de puntos que, representados en una cuadrícula, sugieran la letra L.

11. Repite el mismo problema anterior para las letras T y V.

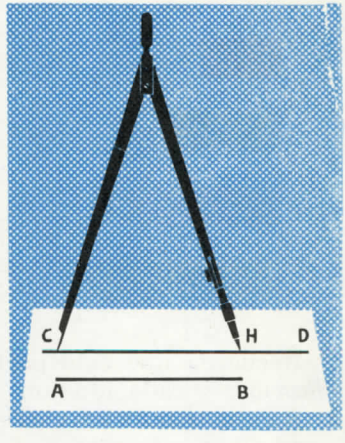
12. Halla las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos (2, 1) y (2, 5).

13. ¿Qué ángulo gira la Tierra en 6 horas? ¿Y en 12 horas? ¿Y en 18 horas? ¿Y en 24 horas?

19

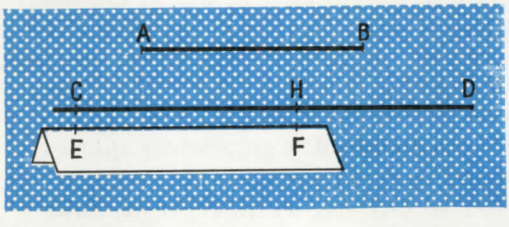
Medida de longitudes

99. Transporte de segmentos. —Una de las construcciones básicas de la Geometría consiste en construir un segmento igual a un segmento dado AB, a lo que se llama *transporte de segmentos.*



Para ello suele emplearse el *compás*, que consta de dos piezas articuladas, terminadas una en punta afilada, y otra en un tiralíneas o portalápices.

Se abre el compás y se coloca una de las puntas en A y la otra en B, puntos extremos del segmento dado AB. Luego, sin variar la abertura del compás, se coloca la punta metálica en C, y con la otra se marca un punto tal como en H. Así tendremos: AB = CH.



Lo mismo se consigue con el *transportador de segmentos* o *portasegmentos.* Este es sencillamente un papel doblado, que ajustamos sobre el segmento dado AB, y en el que marcamos con lápiz los extremos del mismo, para transportarlo a la recta CD.

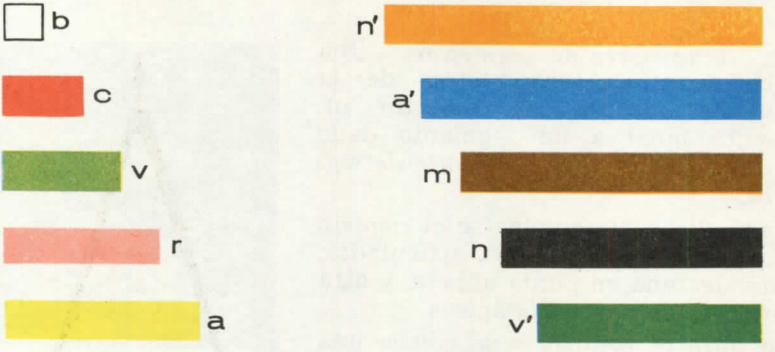
En esta construcción hemos admitido como verdad: *Dos segmentos iguales a un tercero son iguales entre sí.* ¿Cuáles han sido estos tres segmentos?

100. Clases de segmentos o longitudes. — Coloca sobre la mesa todas tus regletas de color. Cada una de ellas es un segmento.

Toma regletas del mismo color. ¿Son iguales? Sí, ya que coinciden al superponerlas mediante un movimiento.

En cambio, dos regletas de distinto color, ¿son iguales? ¿Pueden llevarse a coincidir mediante un movimiento?

Coloca en un montón todos los segmentos que son iguales (del mismo color). ¿Podrá haber algún segmento que pertenezca a dos montones? ¿Podrá haber algún segmento que no pertenezca a ningún montón?

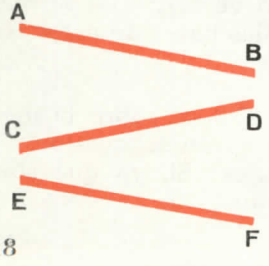


Recuerda que esta partición en conjuntos *disjuntos* se llama *clasificación*, y cada montón es una clase. Hemos dividido el conjunto de los segmentos en clases.

Cada clase contiene todos los segmentos iguales a uno dado: la clase A contiene todos los segmentos amarillos a, a_1, a_2, ...; la clase B contiene todos los segmentos blancos, b, b_1, b_2, ...; la clase C los colorados o rojos; la clase V, los verdes; la clase R, los rosas; la clase V′, los verde oscuros; la clase M, los marrones; la clase N, los negros; la clase A′, los azules, y la clase N′, los naranja.

Cada clase de segmentos es una **longitud.** Comprendes que existen muchas longitudes, tantas como se quieran.

Cualquier segmento colorado c se dice que es un **representante** de la clase C. Cualquier segmento amarillo a es un representante de la clase A. Y lo mismo para las demás clases o longitudes.



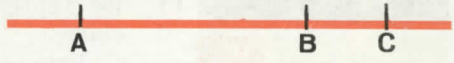
Dibuja en papel transparente un segmento AB. Por medio del portasegmentos, dibuja en el mismo papel otros segmentos CD, EF, ..., iguales al AB. ¿Es el segmento CD igual al EF? ¿Por qué? Apóyate en la propiedad *transitiva*.

Llamaremos clase $\{AB\}$ al conjunto de los segmentos iguales al AB.

101. Definición de adición de longitudes. — Dibuja dos segmentos AB y BC que sean consecutivos, representantes de las clases $\{AB\}$ y $\{BC\}$ respectivamente.

El segmento AC es el representante de una tercera clase, $\{AC\}$, que se llama **suma** de los dos anteriores, y se escribe

$$\{AC\} = \{AB\} + \{BC\}$$



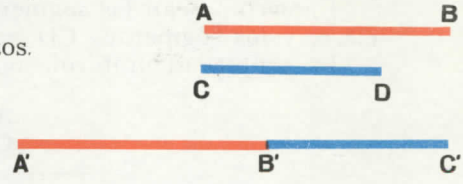
La operación efectuada se llama **adición de longitudes.**

Esta operación, ¿es siempre posible?

Sí, porque siempre podemos encontrar representantes de dos clases dadas, $\{AB\}$ y $\{CD\}$, tales que sean segmentos consecutivos.

En cambio, dos segmentos particulares, como AB y CD, no pueden sumarse.

Pues si construimos dos segmentos $A'B' = AB$ y $B'C' = CD$, y de modo que sean consecutivos, entonces lo que sumamos no son los segmentos AB y CD, sino otros de su misma clase.



Evidentemente el segmento AB, conjunto de los puntos comprendidos entre A y B, no es el mismo que el segmento A'B', conjunto de los puntos comprendidos entre A' y B', aunque sea de la misma clase $\{AB\}$. Son dos conjuntos distintos ciertamente.

EJEMPLOS. 1. Toma una regleta amarilla, $a \in A$, y otra rosa, $r \in R$, y tales que sean consecutivas. La regleta que equivale a la suma de las dos es la azul, $a' \in A'$.

Escribimos

$$A' = A + R$$

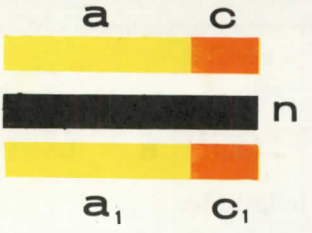
y decimos que la clase azul es la suma de la clase amarilla y de la clase roja.

2. Con las regletas halla las sumas:

$$A + B = \ldots \qquad C + N' = \ldots; \qquad V + R = \ldots$$

Escribe en cada caso los resultados.

102. Propiedad uniforme de la adición de longitudes. — Suma un segmento amarillo, $a \in A$, con otro colorado, $c \in C$. La suma es un segmento negro $n \in N$.



Suma otro segmento amarillo a_1 con otro colorado c_1: la suma es siempre un segmento negro, independientemente de los representantes que tomemos de cada clase.

Esta es la **propiedad uniforme** de la adición de longitudes, y dice:

La suma de dos longitudes es siempre la misma, cualesquiera que sean los representantes que tomemos en cada clase.

EJEMPLO. Sean los segmentos AB = A'B', por tanto de la misma clase, y los segmentos CD = C'D', también de la misma clase.

La propiedad uniforme nos asegura que de

$$\begin{array}{r} AB = A'B' \\ CD = C'D' \\ \hline \end{array}$$

se deduce que $AB + CD = A'B' + C'D'$

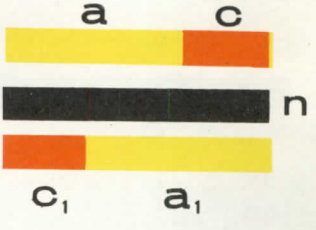
o sea: **sumando miembro a miembro dos igualdades resulta otra igualdad.**

103. Propiedad conmutativa de la adición de longitudes. — Calcula las dos sumas A + C y C + A y escribe en cada caso el resultado. En ambos casos resulta el segmento negro.

Luego

$$\mathbf{A + C \equiv C + A}$$

Esta es la **propiedad conmutativa** de la adición, que se enuncia así:



El orden de los sumandos no altera el valor de la suma.

EJEMPLOS. 1. Comprueba las siguientes igualdades

$$A + V = V + A; \quad A + R = R + A; \quad C + V = V + C$$

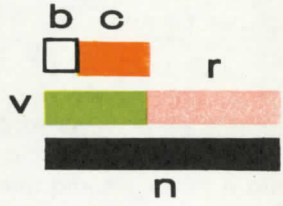
hallando en cada caso los resultados.

2. ¿Son iguales A + (B + C) y (B + C) + A?

¿En virtud de qué propiedad?

¿Y son iguales A + (B + C) y (C + B) + A? ¿Cuántas veces aplicas ahora la propiedad conmutativa?

104. Propiedad asociativa de la adición de longitudes. — Halla la suma B + C con las regletas. La suma efectuada es V. Suma ahora V + R. Nos da el negro N. Estas operaciones, como sabes, se expresan así:



$$(B + C) + R = N$$

Efectúa ahora las siguientes:

$$B + (C + R)$$

Y escribe también el resultado:

$$C + R = V'; \quad B + V' = N$$

El resultado es el mismo que antes. Luego

$$\mathbf{(B + C) + R \equiv B + (C + R)}$$

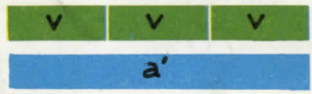
Esta es la **propiedad asociativa** de la adición de longitudes.

Observa que la adición de segmentos generales tiene las mismas propiedades que la adición de números naturales. Esto lo expresamos diciendo que ambos conjuntos: el conjunto S de segmentos generales y el conjunto N de números naturales tienen la misma **estructura.**

105. Multiplicación de una longitud por un número natural. — Efectúa la suma V + V + V.

Obtienes

$$V + V + V = A'$$



Se acostumbra a representarlo así:

$$V \,.\, 3 = 3 \,.\, V = A'$$

Del mismo modo se define

$$A + A = 2 \,.\, A = N'$$

EJEMPLOS. 1. $C + C + C + C = 4 \,.\, C = M$.

2. $B + B + B + B + B = 5 \,.\, B = A$.

3. $R + R = 2 \cdot R = M$.

4. Para el caso particular en que no hay más que un sumando, no se puede aplicar la definición anterior. Entonces convenimos:

$$A = 1 \cdot A.$$

106. Medida de longitudes. — Expresa la longitud V como suma de B.

Sabemos que

$$V = B + B + B = 3 \cdot B$$

Pues bien, decimos que la **medida de la longitud** V es 3, cuando tomamos el B como unidad.

Medida de un segmento es el número que permite construir dicho segmento a partir de uno que se toma por unidad.

La medida de un segmento también se llama **longitud del segmento.**

La longitud del segmento AB la representamos por $\overline{AB}$.

Ejemplos. 1. ¿Cuál es la medida de N cuando se toma B como unidad?

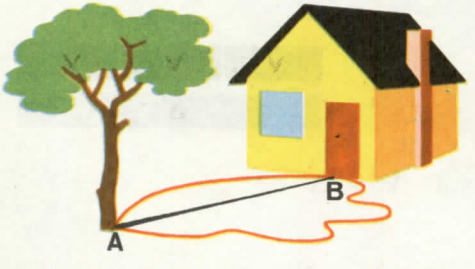
Es 7, ya que $N = 7\,B$.

2. Dado un segmento a, construye otro que valga $3 \cdot a$. ¿Cuál es la medida de este último segmento, si se toma el a como unidad? Es 3.

3. ¿Cuál es la medida del segmento $8\,c$, tomando el c como unidad? Es 8.

107. Distancia entre dos puntos de un plano. — Es la longitud del segmento limitado por estos dos puntos.

Luego *la distancia es un número* y no un segmento.



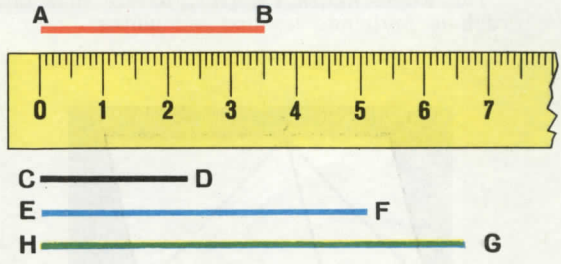
Para ir de un punto a otro lo más rápidamente posible, instintivamente seguimos la línea recta. Si tenemos una cuerda tirante entre dos puntos y queremos darle a ésta otra forma distinta, necesariamente hemos de tomar una mayor longitud de cuerda. O sea:

El camino más corto entre dos puntos A y B es el segmento rectilíneo AB.

EJEMPLOS. 1. Con tu doble decímetro mide la longitud de varios segmentos AB, CD, EF y HG.

2. Mide la longitud de la página de este libro en cm. y mm.

3. Calcula a ojo la largura de tu mesa. Después mídela con tu regla.



EJERCICIOS

1. ¿Cuánto miden los siguientes segmentos, tomando el B como unidad: C, R, A, M, A', N'?

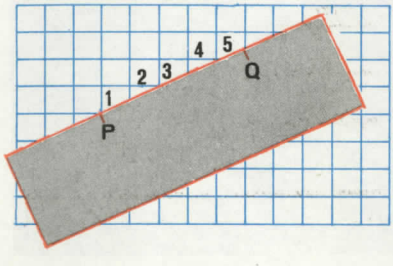
2. Un segmento es doble de otro. ¿Cuál es la medida del primero, si se toma el segundo como unidad?

3. Expresa como suma de sumandos iguales: 7 A, 5 C, 2 N y 3 R.

4. Expresa abreviadamente: C + C + C ; A + A ; R + R + R + + R + R ; V + V + V + V.

5. Se señalan 8 puntos en una recta. ¿Cuántos segmentos hay consecutivos cada uno con el siguiente?

6. Sobre una recta AB lleva con el portasegmentos, uno a continuación de otro, tres segmentos iguales al MN. Expresa el segmento PQ que resulta, como suma de los tres, en función de MN.



7. Poniendo el portasegmentos sobre papel cuadriculado; como indica la figura, divide un segmento PQ en 5 partes iguales. ¿Cuál es la medida de una de estas partes tomando el segmento PQ como unidad?

8. Traza en papel transparente un segmento XY. Por doblado divídelo en dos partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada una de las partes cuando se toma como unidad el segmento XY?

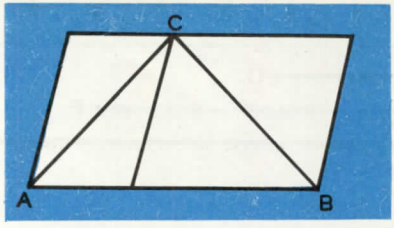
9. Sea AB un segmento de 6 cm de longitud y O su punto medio. Sea M el punto medio de OA y N el punto medio de OB. Calcula la longitud del segmento MN.

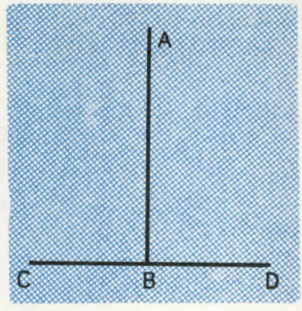
10. En una recta a a' se señalan los puntos consecutivos C, A, B, D tales que los segmentos CA y BD sean iguales, compara los puntos medios de los segmentos AB y CD.

11. Mide la longitud de la página de este libro en cm y en mm.

12. Traza un segmento. Con la regla, halla su punto medio, márcalo con una letra y escribe la igualdad que lo indica.

13. En la figura 1.ª, ¿A C parece más largo o más corto que B C? Compruébalo midiendo los dos segmentos.





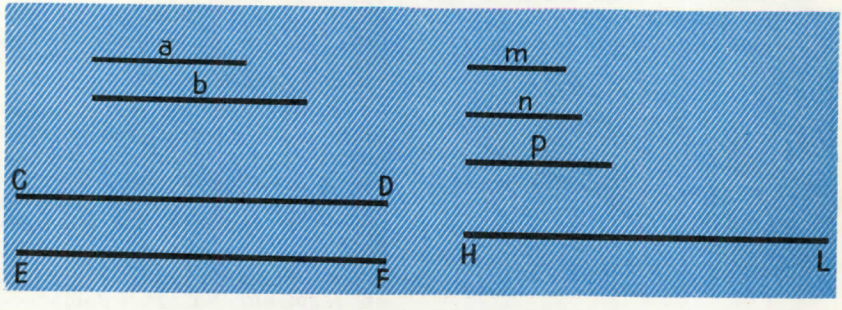
14. En la figura 2.ª, ¿A B parece más corto o más largo que C D? Compruébalo. De los ejercicios 3 y 4 deduce que las conclusiones de carácter geométrico no deben basarse únicamente en la observación.

15. Traza una recta de longitud indefinida. Con el compás marca en ella un segmento de 3 cm.

16. Traza un segmento doble que otro dado.

17. Traza un segmento triple que otro dado.

18. Dados dos segmentos cuyas longitudes son a y b, traza una recta C D y, sobre ella, construye un segmento igual a $a + b$. Sobre otra recta E F, construye un segmento igual a $a - b$.



19. Sobre una recta ilimitada, como HL, construye un segmento igual a m + n + p.

Comprueba que, alterando el orden de los sumandos, se obtiene igual suma.

20. Si x, y, z representan las longitudes de tres segmentos, traza segmentos cuyas longitudes sean:

x + 2 y;
3 x — y;
x + z — y;
x + 2 z — y.

21. Calcula a ojo la longitud y anchura de la clase, de la pared testera, de la pizarra, de una mesa, etc. Después, mídelos.

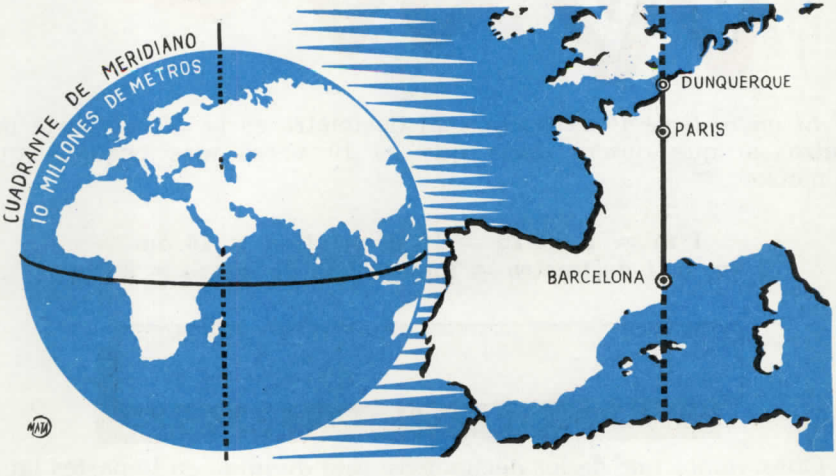
20

Unidades de longitud

108. El metro. — La medida de la extensión de una línea es su *longitud.*

Para medir la longitud de un segmento empleamos el *metro.* La palabra griega «metro» significa medir.

El metro es, muy aproximadamente, *la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre* que pasa por París, o sea que un cuadrante (cuarta parte) de meridiano mide unos 10 millones de metros.



Antes de establecer el Sistema Métrico Decimal, cada nación, y aun cada región, tenía un sistema de pesas y medidas diferente.

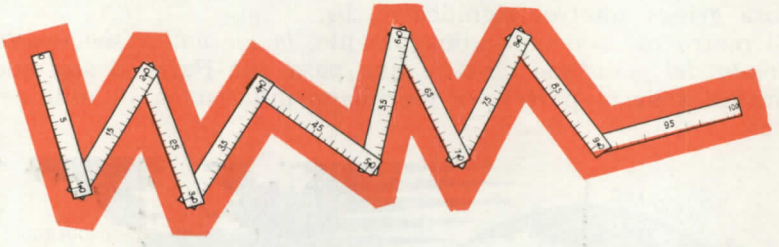
Esto era un gran obstáculo al desenvolvimiento comercial entre las naciones.

A fines del siglo XVIII se acordó unificar todas las unidades, adoptando una *unidad internacional*, tomada del globo terrestre. Sabios españoles y franceses calcularon la longitud del cuadrante de meridiano que pasa por París, midiendo el arco comprendido entre Dunkerque

y Barcelona. Inmediatamente se tomó la diezmillonésima parte del cuadrante, a la que se llamó *metro*, construyendo como metro modelo una barra de platino iridiado, en la que se señalaron dos rayitas, cuya distancia a 0° es el metro legal.

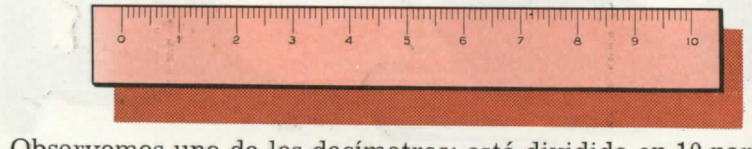
Mediciones más modernas y exactas probaron que las primeras tenían un pequeño error, y que habría que añadir dos décimas de milímetro al metro que calcularon los antepasados. Pero se acordó que *la barra de platino construida primeramente fuese por definición el metro legal.*

109. Submúltiplos del metro. — Observemos el *metro plegable* de la figura. ¿De cuántos trozos se compone? Cada trozo se llama *decímetro* (dm.).



El metro tiene 10 decímetros. El decímetro es la *décima* parte del metro, lo que quiere decir que es 10 veces más pequeño que el metro.

1 m = 1 metro = 10 decímetros = 10 dm
1 dm = 1 decímetro = una décima de metro = 0'1 m

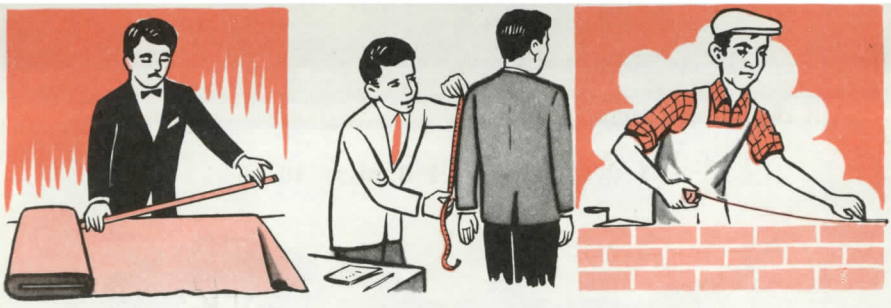


Observemos uno de los decímetros: está dividido en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *centímetro.*

El metro tiene 10×10 centímetros, o sea 100 centímetros.

1 m = 10 dm = 10 × 10 cm = 100 cm
1 cm = una centésima de m = 0'01 m

El centímetro es la centésima parte del metro, lo que quiere decir que es 100 veces más pequeño que el metro.

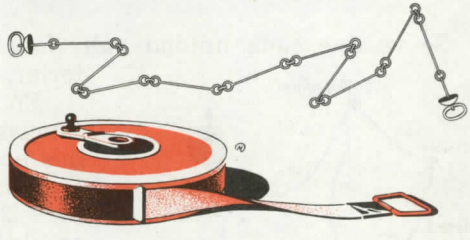


A su vez, el centímetro se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *milímetro*.

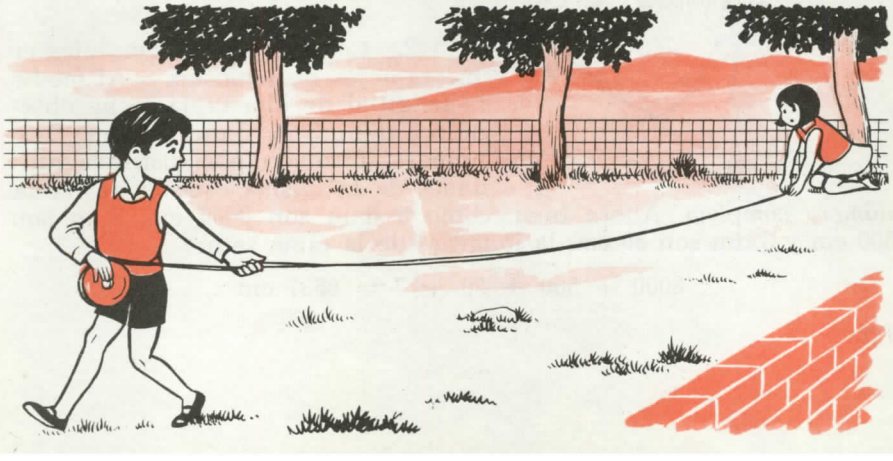
1 m = 10 dm = 100 cm = 100 × 10 mm = 1000 mm
1 mm = una milésima de m = 0'001 m

El milímetro es la milésima parte del metro, o sea 1000 veces más pequeño que el metro.

110. Diversas formas del metro. — El metro puede tener la forma de una *regla cuadrada*, al uso de los comerciantes de paño y tela; de una *cinta de tela*, al uso de los sastres; de una *cinta de acero*, al uso de los albañiles; de un *metro plegable*, etc.

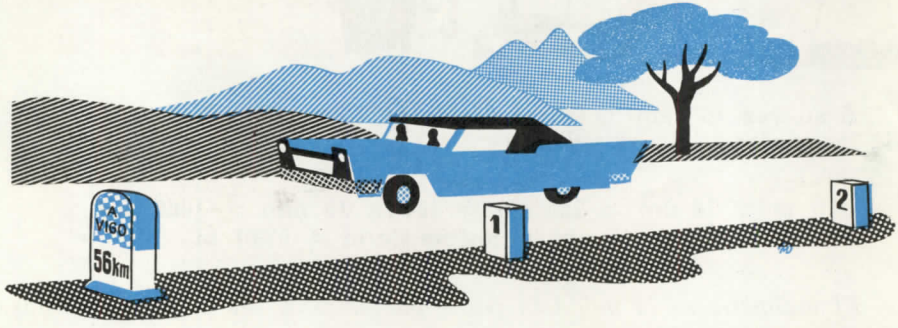


111. Múltiplos del metro. — Para medir la longitud de un terreno se puede emplear la *cadena del agrimensor* (10 varillas unidas, de 1 metro cada una) o el *decámetro de cinta*.



Un decámetro tiene 10 metros.

1 decámetro = 1 dam = 10 m



En las carreteras se miden las distancias gracias a los mojones hectométricos y a los mojones kilométricos.

1 hectómetro = 1 hm = 10 dam = 100 m
1 kilómetro = 1 km = 10 hm = 100 dam = 1000 m

Se ve que cada unidad vale *diez veces* la unidad inmediata inferior.

En un mapa se calculan las distancias gracias a los números colocados entre los discos.

Así, de Valladolid a Segovia hay 50 + 23 + 27 + 10 = 110 km. ¿Cuántos kilómetros hay de Valladolid a Ávila?; ¿de Ávila a Segovia?; ¿de Segovia a Medina del Campo?; ¿de Tordesillas a Arévalo?

112. Conversión de complejos en incomplejos de longitud. — Al medir la longitud de una tapia se ha obtenido 8 dam, 5 m, 3 dm y 7 cm. Este número, formado por distintas unidades de la misma especie, se llama *número complejo*. Ahora bien, como 8 dam son 8000 cm, 5 m son 500 cm y 3 dm son 30 cm, la longitud de la tapia será:

$$8000 + 500 + 30 + 7 = 8537 \text{ cm.}$$

Este número, que expresa una sola clase de unidades, se llama *número incomplejo.*

Así, 5 km, 7 dam, 4 m, 6 dm pueden escribirse 50746 dm, como se ve en el cuadro que va a continuación.

Recíprocamente, *para convertir un incomplejo de longitud en complejo, basta tener en cuenta que la cifra de las unidades es del mismo orden que el incomplejo, la de las decenas del orden inmediatamente superior, etc., la de las décimas, del orden inmediatamente inferior al de las unidades, etc. Si hubiera cifras cero, se salta el orden que le corresponda.*

Así, 6304'75 m puede escribirse: 6 km, 3 hm, 4 m, 7 dm y 5 cm, como se ve en el siguiente cuadro:

CUADRO RESUMEN

MILLAR	CENTENA	DECENA	UNIDAD	DECIMA	CENTESIMA	MILESIMA
km. 1.000	hm. 100	dam. 10	m. 1	dm. 0'1	cm. 0'01	mm. 0'001
5	0	7	4	6		
6	3	0	4	7	5	

113. Cambio de unidad. — Para cambiar de unidad, distinguiremos dos casos, según se quiera pasar de unidades de orden superior a inferior, o viceversa.

Se tiene, por ejemplo, 6304'752 m. Para expresar este número en dm, cm o mm, basta multiplicarlo por 10, 100 ó 1000, ya que 1 m tiene 10 dm, 100 cm ó 1000 mm. Esto es,

$$6304'752 \text{ m} = 63047'52 \text{ dm} = 630475'2 \text{ cm} = 6304752 \text{ mm}$$

Al contrario, para transformar el número dado en unidades de orden superior, habrá que dividir por 10, 100, 1000, etc. Así:

$$6304'752 = 630'4752 \text{ dam} = 63'04752 \text{ hm} = \text{etc.}$$

114. Unidades marinas. — Los marinos emplean la MILLA MARINA, *que es la longitud de un arco de un minuto de grado de meridiano terrestre.*

Dividiendo 40000000 m que mide el meridiano por sus 360 grados, se obtiene 111111 m aproximadamente.

Y dividiendo 111111 m por 60, se obtiene **1852 m,** que es la longitud de la milla marina.

Luego la milla marina es la longitud de 1′ de meridiano, y vale 1852 metros.

La velocidad de un barco se expresa en *nudos*. Se dice, por ejemplo, que la velocidad de un barco es 20 nudos cuando recorre 20 millas marinas en una hora.

CÁLCULO MENTAL

- **Responde:**

5 dm = 0'5 ...	82 hm = 8'2 ...	6 hm = 600 ...
12 mm = 0'12 ...	17 dam = 0'17 ...	35 cm = 0'35 ...
5 m = 50 ...	15 dm = 150 ...	7 dm = 70 ...

- **Piensa y di:**

12 m = ... dm.	875 mm = ... dm.	462 dm = ... cm.
35 dam = ... m.	47 m = ... dam.	57'2 cm = ... mm.
8 dm = ... mm.	5 km = ... dam.	57 hm = ... m.

- **Expresa** en cm : 0'5 m ; 3 dam ; 15 hm ; 0'2 dm
  en mm : 25 dm ; 3 cm ; 0'2 hm
  en m : 6'2 hm ; 5 dm ; 15 dam.

EJERCICIOS

Reduce a incomplejo del orden inferior:

1. 8 m, 5 dm. **2.** 8 m, 5 cm. **3.** 7 m, 4 dm, 3 cm.
4. 4 dam, 4 m, 3 dm. **5.** 7 dm, 4 cm, 3 mm. **6.** 7 m, 4 cm, 3 mm.

Expresa en forma de número complejo:

7. 9'06 m. **8.** 7'52 m. **9.** 0'752 m.
10. 4'036 km. **11.** 0'409 km. **12.** 9'0403 km.
13. 7'007 km. **14.** 8'8 km. **15.** 0'10802 km.

16. Reduce a mm:

a) 0'0431 m. *b*) 4'0619 dam. *c*) 0'00683 km.

Indica el número de:

17. Centímetros en: *a*) 70'31 m; *b*) 1'05 dm; *c*) 8'2 hm.
18. Metros en: *a*) 4'708 hm; *b*) 0'312 km; *c*) 0'87 dm.
19. Decámetros en: *a*) 3'024 m; *b*) 7 km; *c*) 0'08 hm.
20. Decímetros en: *a*) 1 km; *b*) 0'061 dm; *c*) 0'607 km.

Expresa:

21. En metros: *a*) 483 cm; *b*) 79 hm; *c*) 8 dm.
22. En kilómetros: *a*) 3081 m; *b*) 1490 km; *c*) 85 dam.
23. En decímetros: *a*) 4105 mm; *b*) 9300 km; *c*) 800 cm.
24. En hectómetros: *a*) 504384 cm; *b*) 73009 dam; *c*) 3010 km.

Expresa en cm:

25. 31 m, 8 cm.
26. 6 dm, 5 cm.
27. 4707 cm.
28. 5 dam, 9 dm.
29. 4'708 km.
30. 0'063 km.

Expresa como decimales del kilómetro:

31. 5 km, 4 dam, 7 m.
32. 416 m.
33. 9 km, 3 hm, 2 m.
34. 6 m, 26 cm.

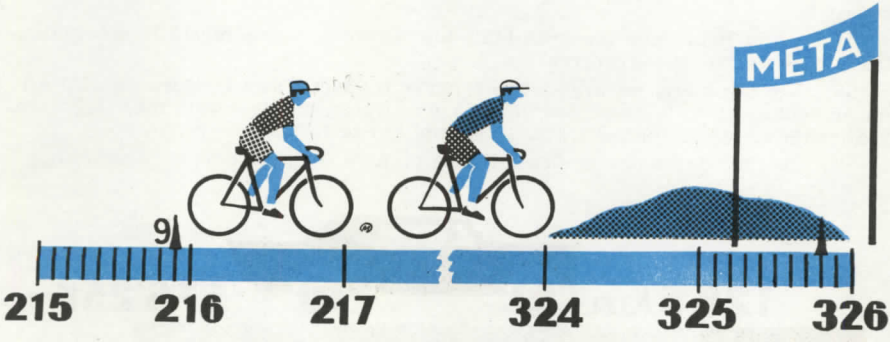
Expresa como decimales del hectómetro:

35. 4'976 km.
36. 8 km, 4 hm, 3 dam.
37. 13'027 km.
38. 5 hm, 28 m.

39. Reduce a metros:

a) 3'6858 km. *b*) 8'4927 km. *c*) 0'9098 hm.

40. Expresa en km y m: 780 km, 512 hm, 27 dam y 8 dm.



41. La salida de una carrera ciclista está en el hectómetro 9 del poste kilométrico 215. La meta está situada en el hectómetro 8 del poste 325. ¿Qué distancia han de corrrer los ciclistas?

42. ¿Cuántos tubos de hierro de 2'5 m se necesitan para una conducción de aguas de 1'75 km?

43. Una pieza de tela ha medido 24 m utilizando un metro falso de 101 centímetros. ¿Cuál es la verdadera longitud de la pieza?

44. Un puente tiene 7 arcos de 1'2 dam cada uno. ¿Qué longitud tiene el puente?

45. Un peregrino se propone recorrer 1254 km. Anda a razón de 33 km por día, término medio. ¿Cuánto dura su viaje?

46. ¿Cuántos kilómetros tiene un meridiano terrestre? ¿Y el Ecuador?

47. Un automóvil recorre 12'5 hm por minuto. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en 4 horas y media?

48. La escalera de una casa tiene 125 peldaños y una altura de 24 m. ¿Cuál es la altura de cada peldaño?

49. El túnel Simplón que atraviesa los Alpes mide 18 km, 4 hm y 7 dam, y el túnel de San Gotardo, en la misma cordillera, mide 148 hm y 1 dam. ¿Cuál de los dos es el más largo? ¿En cuántos dam excede al otro?

50. He recorrido en mi coche 91 km y 12 dam de Madrid a Segovia, y a continuación 115 km, 7 hm y 5 dam de Segovia a Valladolid. ¿Cuánto he recorrido en total?

51. Sabiendo que el diámetro de una moneda de 5 céntimos es de 2 cm, para medir la anchura de una mesa, he llevado dicha moneda 43 veces sobre la anchura pedida. ¿Cuánto mide ésta?

52. ¿Cuánto cuestan 125 metros de una pieza de tela, si un dam de la misma vale 685 pesetas?

53. Un comerciante vende 28'35 metros de paño por 4674 pesetas. Pierde 16'50 pesetas por metro al venderlos. ¿En cuánto los ha comprado?

54. De una pieza de tela de 84 m de larga se han cortado 37'5 metros una vez, y 16'3 metros otra. ¿Cuántos decímetros quedan?

55. Un pozo para extracción de petróleo tiene una profundidad de 2308 m. ¿Cuánto ha de profundizarse todavía para llegar a los 3'5 km, a que se encuentra la bolsa de petróleo?

56. Cuando el decímetro de tela cuesta 10'50 pesetas, ¿cuánto valen 16'4 metros?

57. Un ciclista debe recorrer 148'6 km. Después de correr 75'25 km, ¿cuántos hm le faltan por recorrer?

58. Un caminero, encargado de reparar un trozo de carretera de 25'6 km, ha arreglado durante el primer mes 58 hm; durante el segundo mes, 347 dam, y durante el tercer mes, 8'4 km. ¿Cuántos km le faltan por reparar?

59. Con los datos del gráfico adjunto plantea un problema y resuélvelo.

60. Tu paso mide 6'5 dm y das 140 pasos por minuto. ¿Cuántos km recorres en media hora?

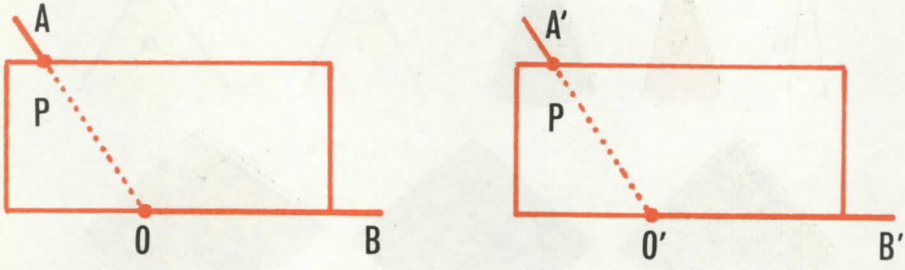
61. Una persona compró 23'6 metros de tela. ¿Qué longitud real de tela se llevó si el metro con que se midió tenía 19 milímetros menos de lo debido?

62. La escalera de una casa tiene 101 peldaños y cada peldaño tiene una altura de 175 milímetros. ¿Qué altura tiene la escalera?

21

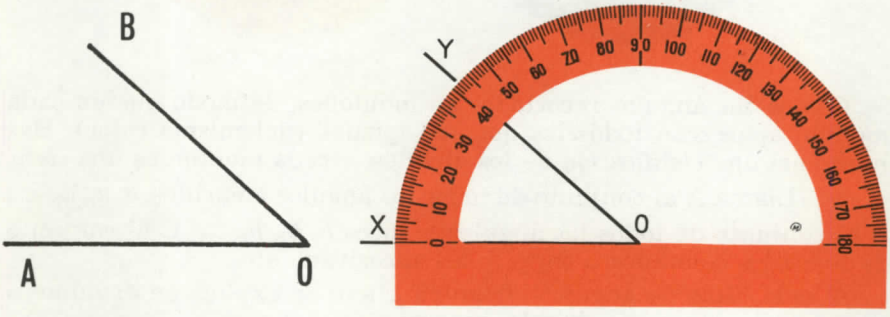
Clases de ángulos y adición de las mismas

115. Transporte de ángulos. —*1er Procedimiento.* Sea AOB el ángulo que deseamos transportar. El borde recto de una tira de papel se aplica a un lado, OB, del ángulo; en ese borde se señala con un punto la posición del vértice O. Donde el lado OA corta al lado



opuesto de la tira de papel se señala el punto P. Llevando la tira de papel a otro sitio puede reproducirse un ángulo igual, A'O'B'.

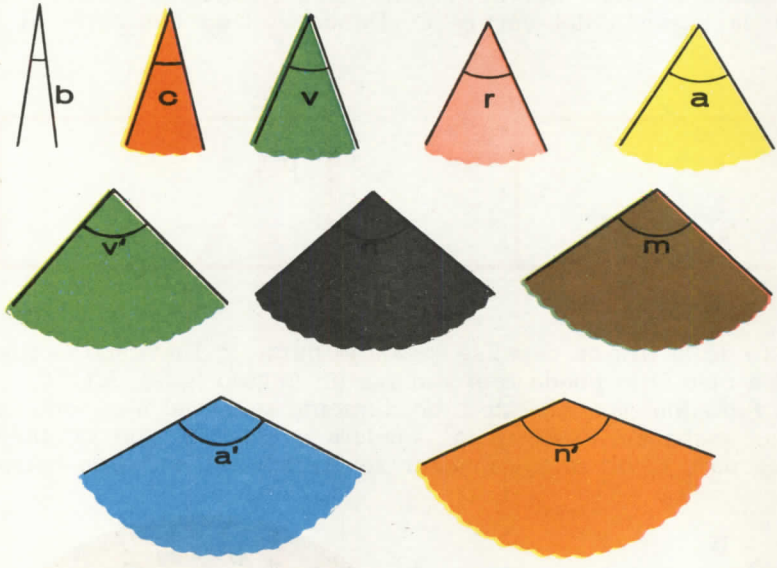
2.º Procedimiento. En este procedimiento se usa el *transportador de ángulos*, instrumento de metal, madera o plástico, que también se emplea para medir ángulos, según se explicará el próximo curso.



Para construir un ángulo igual al AOB, con el transportador de ángulos, se hace coincidir el centro O del aparato con el vértice del ángulo y el lado OA sobre el 0 de la escala. Se mira en seguida

con qué división de la escala coincide el lado OB; en este caso la división 42. Se lleva ahora el transportador sobre una semirrecta OX, y uniendo O con la división 42 se obtiene OY, siendo $\widehat{XOY} = \widehat{AOB}$.

116. Clases de ángulos. — En cartulinas de colores recorta ángulos de modo que todos los que tengan el mismo color sean iguales entre sí. Emplea los mismos colores que para las regletas, y también las mismas letras para designar los ángulos. Así obtendrás la siguiente colección:



Coloca tus ángulos recortados en montones, de modo que en cada montón aparezcan todos los que son iguales (del mismo color). Has hecho así una *clasificación* de los ángulos, y cada montón es una *clase*.

3.° Llama A al conjunto de todos los ángulos amarillos, $\widehat{a}$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, ...; B al conjunto de todos los ángulos blancos $\widehat{b}$, $\widehat{b}_1$, $\widehat{b}_2$, ...; C al conjunto de todos los colorados o rojos, y así sucesivamente.

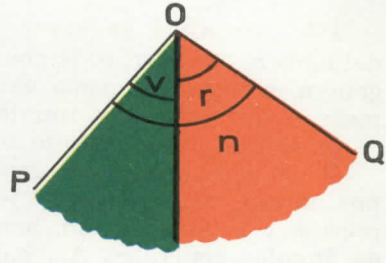
A cada clase de ángulos, obtenida según se explica en el número anterior, se denomina **ángulo general.**

Así A representa al ángulo general amarillo, o conjunto de todos los ángulos amarillos; B es el ángulo general blanco; C, el colorado; V, el verde; R, el rosa; N, el negro; M, el marrón, etc.

117. Adición de ángulos generales. — Coloca de modo que sean consecutivos un ángulo v y otro r, representantes de las clases V y R.

El ángulo POQ $= \widehat{n}$ que así se obtiene es el representante de una tercera clase N, que se llama **suma** de las dos anteriores, y se escribe

$$V + R = N$$



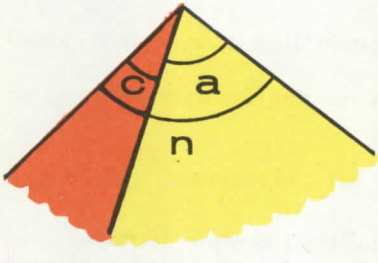
La operación efectuada se llama **adición de ángulos generales.**

¿Es siempre posible esta operación?

Sí, porque dados dos ángulos cualesquiera, siempre podemos hallar otros dos iguales a ellos y que sean consecutivos.

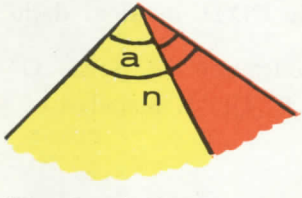
En cambio dos ángulos particulares $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ no se pueden sumar en general, pues para ello han de ser consecutivos. Si tomamos otros iguales a ellos y que sean consecutivos, entonces lo que sumamos no son los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$, sino otros de la misma clase.

118. Propiedades de la adición de ángulos generales. —



I. **Uniforme.** — Suma un ángulo colorado c con otro amarillo a. Obtienes un ángulo n. Suma ahora otro ángulo colorado c_1 con otro amarillo a_1. Obtienes otro ángulo negro $n_1 \in$ N.

La suma es independiente de los representantes elegidos.



II. **Conmutativa.** — Suma ahora un ángulo amarillo a con otro colorado c. La suma es igual que antes, o sea

$$\mathbf{C + A = A + C = N}$$

III. **Asociativa.** — Mediante tus ángulos recortados comprueba que se cumple

$$\mathbf{(B + C) + R = B + (C + R)}$$

En efecto:

$$(B + C) + R = V + R = N = B + V' = B + (C + R)$$

119. Magnitud angular. — A causa de las propiedades I, II y III del número anterior, podemos asegurar que el conjunto de los ángulos generales tiene la misma estructura que el conjunto N de los números naturales o el conjunto S de las longitudes.

Es lo que antiguamente se llamaba **magnitud angular.**

Como ves, un ángulo general queda unívocamente determinado por uno de sus representantes. Esto nos permite simplificar su expresión y representación, hablando simplemente de **ángulos** en vez de **ángulos generales.** Así hablaremos de ángulo unas veces con el sentido de ángulo particular, y otras veces de ángulo general. El contexto indicará, sin lugar a dudas, cuál de los dos sentidos debe atribuirse.

Por ejemplo, si decimos «los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son consecutivos», se toma en sentido estricto. Pero si decimos «suma de los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$», debe entenderse que son ángulos generales.

120. Ángulos complementarios y suplementarios. —A la clase formada por todos los ángulos rectos se le llama *ángulo general recto.*

Dos ángulos generales cuya suma es un ángulo general recto se llaman *complementarios.*

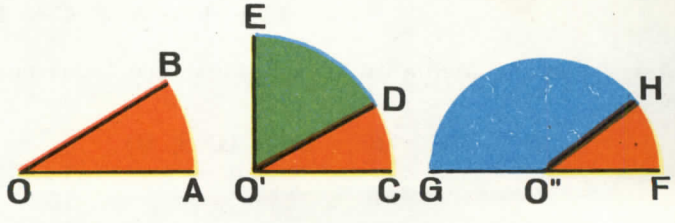
La clase formada por todos los ángulos llanos se llama *ángulo general llano.*

Dos ángulos generales cuya suma es un ángulo llano general se llaman *suplementarios.*

Ejemplos. 1. Si los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son adyacentes, ¿cómo son A y B?

2. Traza un ángulo agudo AOB, y halla su complementario y su suplementario. Para lo primero construye un ángulo recto, y dentro de él, con un lado común, traza un ángulo CO'D, igual al dado. El ángulo EO'D resuelve el problema.

Para lo segundo, traza la recta GF, y fijando un punto O'' de la misma, construye $\widehat{FO''H}$ igual al dado. El $\widehat{GO''H}$ resuelve el problema.



EJERCICIOS

1. Si $\widehat{POQ} \in \{\hat{a}\}$, ¿cómo son $\widehat{POQ}$ y $\hat{a}$? Escríbelo.

2. Si $\{\widehat{POQ}\} \equiv \{\hat{b}\}$, ¿cómo son $\widehat{POQ}$ y $\hat{b}$? Escríbelo

3. Si $\widehat{SOT} = \hat{c}$, ¿cómo son $\{\widehat{SOT}\}$ y $\{\hat{c}\}$? Escríbelo.

4. Traza dos rectas paralelas AA′ y BB′; después, una recta CC′ que corta a la primera en D y a la segunda en E. Nombra todos los ángulos convexos de la figura.

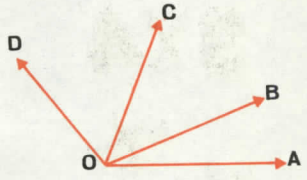
5. Traza dos rectas AA′ y BB′ que se cortan en un punto O. Nombra todos los ángulos convexos que se forman.

6. Coloca de modo que sean consecutivos un ángulo rosa y otro amarillo: dibuja en una cuartilla la figura obtenida.

7. Coloca de modo que sean consecutivos cada uno con el siguiente, un ángulo colorado, otro verde y otro negro. Dibuja la figura obtenida.

8. Con tus ángulos recortados construye una figura formada por 4 ángulos consecutivos cada uno con el siguiente.

9. Dibuja en una cuartilla dos ángulos, y comprueba por medio de un papel transparente si son iguales o distintos. ¿Cómo lo verificarías mediante el transportador de ángulos?



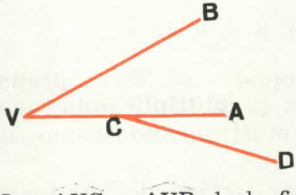
10. Considera los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOD}$ de la figura. ¿Son consecutivos?

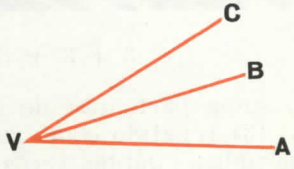
Lee en dicha figura dos ángulos que sean consecutivos. Lee tres ángulos que sean consecutivos cada uno con el siguiente.

11. En la figura anterior estudia los conjuntos $\widehat{AOC} \cap \widehat{BOD}$, $\widehat{AOB} \cap \widehat{COD}$ y $\widehat{AOC} \cup \widehat{BOD}$.

12. En la figura anterior nombra dos ángulos: *a*) cuya intersección es un ángulo; *b*) cuya intersección es una semirrecta; *c*) cuya intersección es el conjunto vacío.

13. ¿Son consecutivos los ángulos $\widehat{AVB}$ y $\widehat{ACD}$ de la figura 1.ª? ¿Tienen alguna analogía con los ángulos consecutivos?





14. Los $\widehat{AVC}$ y $\widehat{AVB}$ de la figura 2.ª, ¿son consecutivos? ¿Tienen alguna analogía con los ángulos consecutivos? ¿En la figura hay ángulos consecutivos? ¿Cuáles?

15. ¿Es verdadera la propiedad: «Cuando dos ángulos son rectos son suplementarios»? ¿Es cierta la recíproca?

16. Dos ángulos son suplementarios e iguales. ¿Cuánto vale cada uno de dichos ángulos?

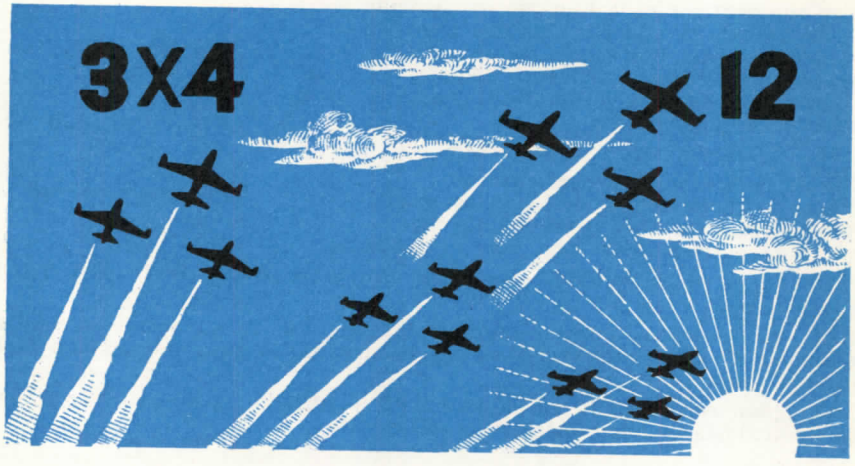
17. Si un ángulo es agudo, ¿cómo es su suplementario? ¿Y si es obtuso?

18. Dibuja dos ángulos adyacentes, y sus bisectrices. ¿Cómo son entre sí estas últimas?

22

Multiplicación de números naturales

121. Definiciones. — Pasan 4 escuadrillas de 3 aviones cada una. Son en total (3 + 3 + 3 + 3) aviones, lo que abreviadamente se representa por 3 × 4. O sea,



$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$$

Esta suma particular de números iguales se llama **producto**. El número (3) repetido como sumando es el **multiplicando**; el número (4), que indica cuántas veces entra el multiplicando como sumando, se llama **multiplicador.**

Multiplicando y multiplicador son los *factores* del producto.

La operación de hallar el producto de dos números se llama **multiplicación.**

La multiplicación es una adición abreviada de sumandos iguales.

El signo de la multiplicación es × y también ·.

No confundas los términos *multiplicación* y *producto*. La multiplicación es una operación, y el producto es un número, resultado de dicha operación.

EJEMPLOS. 1. Expresa como producto $5 + 5 + 5 + 5$.

$$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$$

2. Expresa como suma 6×5.

$$6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

3. En cada uno de los ejercicios anteriores di cuáles son los factores y cuál es el producto.

122. Problemas prácticos. — Siempre que en un problema se trate de una suma de sumandos iguales, has de resolverlo mediante una multiplicación, lo que siempre resulta más sencillo.

EJEMPLOS. 1. En una clase hay 6 filas de mesas, y cada fila tiene 7 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Hay:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 6 = 42 \text{ alumnos.}$$

2. Un salón de actos tiene 19 filas de butacas de 10 butacas cada una. ¿Cuántos espectadores pueden sentarse en este salón?

Pueden sentarse

$$10 + 10 + 10 + \overbrace{\ldots\ldots}^{19} + 10 = 10 \times 19 = 190 \text{ espectadores.}$$

3. Un coche corre a una velocidad de 75 km/h. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en 4 horas?

Ha recorrido

$$75 + 75 + 75 + 75 = 75 \times 4 = 300 \text{ km.}$$

123. Tabla de multiplicar. — Para multiplicar números de una cifra, construye la siguiente tabla, llamada de Pitágoras:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Como ves, la fila del 3 se obtiene sumando a la fila del 2 la del 1; la fila del 4 resulta sumando a la fila del 3 la del 1; y así sucesivamente, siempre sumando a la fila anterior la del 1.

EJEMPLOS. 1. Para hallar 7×8 se busca columna del 7 y fila del 8. El producto es 56.

2. Halla en la tabla los siguientes productos:

$$8 \times 9; \quad 7 \times 6; \quad 5 \times 4; \quad 6 \times 8$$

124. Multiplicación por cero. — ¿Qué significa 0×4?

Aplicando la definición de multiplicación

$$0 \times 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

¿Y qué significa 4×0?

De momento no significa nada, pues no podemos aplicar la definición de multiplicación, ya que no existen sumas de cero sumandos. Sin sumandos no hay suma. Luego en este caso precisamos dar una nueva definición. Parecía natural, y así se ha convenido, que

$$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0$$

Cualquier número multiplicado por cero da cero.

EJEMPLOS. 1. Halla 7×0; 18×0; 174×0.

125. Multiplicación de un número por la unidad seguida de ceros. — ¿Cuánto vale 195×100?

$$195 \times 100 = 195 \text{ centenas ó } 19500$$

Para multiplicar un número entero por la unidad seguida de ceros se colocan a la derecha del número tantos ceros como son los que siguen a la unidad.

EJEMPLOS. 1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

$8 \times 10 =$; $74 \times 100 =$; $125 \times 1000 =$;
$718 \times 100 =$; $1257 \times 10 =$

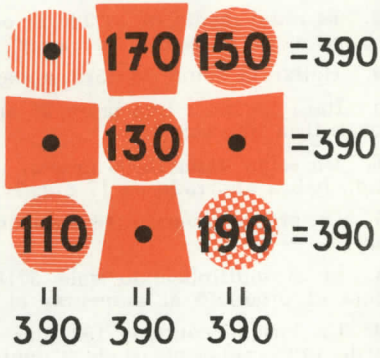
CÁLCULO MENTAL

- **Efectúa** mentalmente los siguientes productos:

$60 \cdot 9$	;	$75 \cdot 5$	;	$300 \cdot 8$	;	$2000 \cdot 9$
$70 \cdot 70$	;	$60 \cdot 10$	;	$400 \cdot 40$	;	$3000 \cdot 8$

- **Multiplica** cada número de la fila horizontal por cada uno de la vertical, en el primer cuadro:

X	7	4	8	3
5				
9				
2				
6				



- **Sustituye** los puntos del segundo cuadro por los números convenientes para que sumando te dé ¡390 por todas partes!

- **Contesta** con rapidez:

37 × 100 = ; 45 × 1000 = ; 162 × 10 =
72 × 10 = ; 108 × 100 = ; 381 × 1000 =

EJERCICIOS

Escribe en forma de producto las siguientes sumas:

1. 2 + 2 + 2 = ...
2. 3 + 3 + 3 + 3 = ...
3. y + y = ...
4. 5 + 5 + 5 = ...
5. 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = ...
6. $n + n + n + n$ = ...

Desarrolla en forma de adición los siguientes productos:

7. 4 × 6 = ...
8. 7 × 3 = ...
9. $n \times 7$ = ...
10. $q \times 5$ = ...

11. En una excursión, Juanito e Inés andan 3527 m cada hora. ¿Cuánto han caminado después de 4 horas?

12. En una carrera ciclista la velocidad media de un corredor ha sido de 32 km/h. ¿Cuál ha sido el trayecto recorrido, si ha empleado en el camino 8 horas?

13. El radio medio de la Tierra es de 6367 km. La distancia de la Tierra a la Luna es de 60 radios terrestres. ¿Cuánto vale esta distancia en km?

14. Hallar la suma de 1579 sumandos iguales a 15817.

15. Para construir una tapia, 25 obreros emplean 37 días. ¿Cuánto tardaría en construirla uno solo?

16. Un señor gana 15000 pesetas mensuales y gasta al año 142000 pesetas. ¿Cuánto habrá ahorrado en 17 años?

17. Un granjero vendió 46 docenas de huevos a 2 pesetas el huevo. ¿Cuánto cobró?

18. Si el multiplicando vale 5718 y el multiplicador 6213, ¿en cuánto aumenta el producto al aumentar el multiplicador en 32 unidades?

19. Un bosque contiene 152 filas de 248 árboles cada una. Se venden a razón de 140 pesetas el árbol. ¿Cuánto importa la venta?

20. A cada lado de una carretera hay plantadas dos filas de árboles que contienen 654 árboles cada una. Si cada árbol tiene 3 m^3 de madera y el m^3 se vende a 56 pesetas, dígase el valor de todos ellos.

21. Un pasillo tiene 12 filas de baldosas. Si en cada fila hay 57 baldosas y una baldosa cuesta 6 pesetas, hállese el coste de todas las baldosas del pasillo.

22. Un capataz tiene que construir 359 m de valla. Si cada día construye 12 m, ¿cuántos le quedarán por hacer al cabo de 26 días?

23. Un tren desarrolla una velocidad de 75 km/h. por término medio. ¿Qué distancia recorrerá desde las 5 de la tarde hasta las 11 de la mañana del día siguiente?

24. Con el dinero que tengo puedo comprar 27 docenas de plumas estilográficas de 87 pesetas cada una y me sobran 356 pesetas. ¿Cuánto dinero tengo?

25. Un comerciante vende 7 bicicletas de 1200 pesetas cada una, 12 máquinas de escribir de 1750 pesetas cada una y 27 receptores de radio que cuestan 3350 pesetas cada uno. Con el importe de la venta, más 27250 pesetas, compra una finca. ¿Cuál es el importe de la misma?

23

Propiedades de la multiplicación de números naturales

126. Propiedad conmutativa. — *¿Cuántas botellas hay en la caja de la figura?* Carlos dice: Hay 5 filas de 3 botellas cada una, o sea

$$3 \times 5$$

Ignacio dice: Yo no veo más que 3 filas de 5 botellas cada una, o sea

$$5 \times 3$$

¿Quién tiene razón? Tienen razón los dos, pues depende de cómo se mire, y en ambos casos el resultado es el mismo:

$$3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$$

Esta es la **propiedad conmutativa** de la multiplicación, que se enuncia:

El orden de los factores no altera el producto.

EJEMPLOS. 1. Comprueba que $4 \times 6 = 6 \times 4$.

En efecto: $6 \cdot 4 = 24$; $4 \cdot 6 = 24$.

2. ¿Qué valores puedes dar a las letras a y b en la igualdad

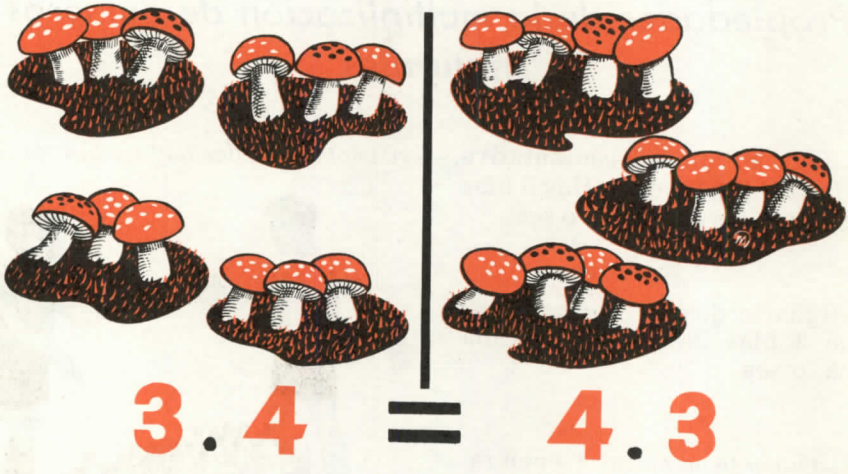
$$a \times b = b \times a\,?$$

3. Enuncia un problema en que se verifique que $4 \times 7 = 7 \times 4$.

Por ejemplo: «En una cartulina tenemos 4 filas de 7 botones cada una, o sea 7×4 botones. Dando un cuarto de vuelta a la cartulina aparecen 7 filas de 4 botones cada una, o sea 4×7. Por tanto,

$$7 \times 4 = 4 \times 7$$

4. ¿Hay igual número de hongos en las dos partes de la figura adjunta?



127. El paréntesis. — *Un comerciante vende 7 cartones con botones, que tienen cada uno 8 filas con 5 botones cada fila. ¿Cuántos botones ha vendido?*

Primeramente hay que hallar cuántos botones tiene cada cartón, o sea (5×8) botones. Y luego se multiplica este resultado por 7. Esto se puede expresar así:

$$(5 \times 8) \times 7 = 40 \times 7 = 280 \text{ botones.}$$

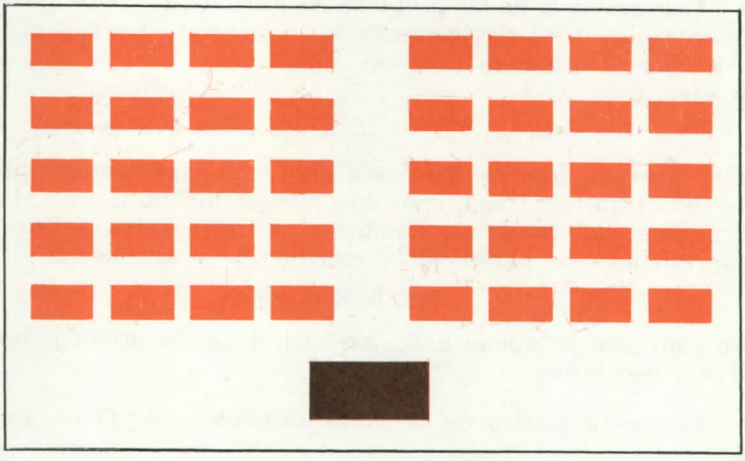
El paréntesis indica que la primera operación que hay que realizar es la que va dentro del mismo.

Ejemplos. 1. Efectúa: $3 \times (8 \times 9)$; $[(5 \times 6) \times 9] \times 2$. $3 \times (8 \times 9) = 3 \times 72 = 216$; $[(5 \times 6) \times 9] \times 2 = [30 \times 9] \times 2 = 270 \times 2 = 540$.

2. Expresa utilizando paréntesis este problema: «Una formación de soldados consta de 6 filas, y cada fila de 4 soldados. En total hay 8 formaciones análogas. ¿Cuántos soldados son?»

Son $(6 \times 4) \times 8 = 24 \times 8 = 192$ soldados.

128. Propiedad asociativa de la multiplicación. —*Los alumnos de una clase están divididos por un pasillo central en dos partes, en cada una de las cuales hay 5 filas de 4 alumnos cada una. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?*



Se puede resolver así:
Cada parte tiene (5×4) alumnos. Luego en total hay

$$(5 \times 4) \times 2 = 20 \times 2 = 40 \text{ alumnos.}$$

Pero también así:
Cada fila tiene (4×2) alumnos. Luego en total hay

$$5 \times (4 \times 2) = 5 \times 8 = 40 \text{ alumnos.}$$

Como de las dos formas ha de dar el mismo número de alumnos, se tiene

$$(5 \times 4) \times 2 = 5 \times (4 \times 2)$$

Esta es la **propiedad asociativa** de la multiplicación.

Ejemplos. 1. Comprueba que $(6 \times 5) \times 8 = 6 \times (5 \times 8)$.
En efecto,

$$6 \times 5 \times 8 = 30 \times 8 = 240 \quad ; \quad 6 \times (5 \times 8) = 6 \times 40 = 240$$

2. Si los números son grandes, la comprobación es laboriosa. Demuestra por razonamiento que cualquiera que sean los valores atribuidos a las letras *a*, *b* y *c*, se verifica que

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Por ejemplo, aplicando la definición de multiplicación

$$(4 \times 3) \times 2 = (4 \times 3) + (4 \times 3) = (4 + 4 + 4) +$$
$$+ (4 + 4 + 4) = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \,.\, 6 = 4 \times (3 \times 2)$$

129. Consecuencia de las propiedades asociativa y conmutativa. — Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa, expresa de diversas formas el producto $(5 \times 8) \times 4$.

Por ejemplo:

$$(5 \times 8) \times 4 = 5 \times (8 \times 4) = (8 \times 4) \times 5 = 8 \times (4 \times 5) = \text{etc.}$$

Indica en cada uno de los pasos qué propiedad hemos aplicado.

Esto indica que los tres números se pueden multiplicar en el orden y forma que se quiera, dando siempre el mismo resultado. Esto se indica suprimiendo los paréntesis y escribiendo simplemente

$$5 \times 8 \times 4$$

Pero esto sólo se puede hacer en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa.

130. Elemento neutro de la multiplicación. — ¿Qué significa 1×4?

Aplicando la definición de multiplicación:

$$1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

¿Y qué significa 4×1?

Aquí no podemos aplicar la definición dada en la lección anterior de multiplicación, porque no puede existir suma donde hay un solo sumando. Por tanto hemos de dar una nueva definición para este caso particular. Con el fin de que siga cumpliéndose la propiedad conmutativa, convenimos que

$$4 \,.\, 1 = 1 \,.\, 4 = 4$$

Resulta, pues, que el número 1, aplicado como factor a un número cualquiera, da como producto este mismo número. Por esta propiedad, el número 1 es el **elemento neutro** de la multiplicación.

131. Orden de las operaciones de adición y multiplicación. — Cuando en un mismo cálculo se encuentran adiciones o sustracciones y multiplicaciones, se siguen los siguientes convenios:

a) Cuando no hay paréntesis, las multiplicaciones se efectúan antes que las adiciones y sustracciones.

b) Cuando hay sumas y diferencias entre paréntesis, las adiciones y las sustracciones que permiten calcularlas se efectúan antes que las multiplicaciones.

Así, en $6 \times 8 + 5$ la multiplicación se efectúa antes que la adición:

$$6 \times 8 + 5 = 48 + 5 = 53$$

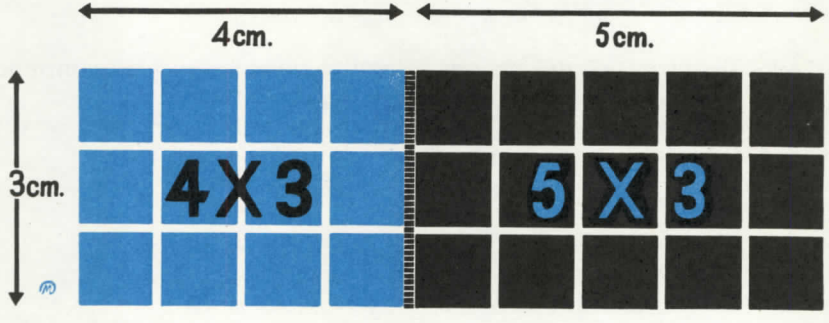
Por el contrario, en $7 \times (5 + 6)$
la adición se efectúa antes que la multiplicación:

$$7 \times (5 + 6) = 7 \times 11 = 77$$

Igualmente:

$$4 \times 9 - 6 = 36 - 6 = 30$$
$$5 \times (9 - 7) = 5 \times 2 = 10$$
$$7 \times 8 - 4 \times 3 = 56 - 12 = 44$$
$$7 \times (9 - 3 \times 2) = 7 \times (9 - 6) = 7 \times 3 = 21$$

132. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. — El rectángulo de la figura contiene $(4 + 5) \times 3$ cuadraditos de 1 cm^2. Por otra parte es la suma de dos rectángulos que contienen 4×3 y 5×3 cuadraditos. Luego:



$$\mathbf{(4 + 5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3} \qquad (1)$$

Para multiplicar una suma o diferencia indicada por un número se puede multiplicar cada término por este número y sumar o restar los resultados.

Ejemplos. 1. Comprueba que es cierta la igualdad

$$(7 - 3) \times 4 = 7 \times 4 - 3 \times 4$$

2. Tratamos de calcular el producto $(5 + 4)\ (3 + 2)$:
Por el significado del paréntesis (núm. 127) se puede considerar $(5 + 4)$ como un solo número. Y aplicando la propiedad distributiva, se tiene:

$$(5 + 4) \times (3 + 2) = (5 + 4) \times 3 + (5 + 4) \times 2$$

y volviendo a aplicar esa misma propiedad, resulta:

$$(5 + 4) \times (3 + 2) = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 2 \quad (2)$$

3. ¿Qué valores se pueden colocar dentro del cuadrado para que

$$(5 + \square) \times 3 = 5 \times 3 + \square \times 3 \ ?$$

4. ¿Qué valores se pueden atribuir a las letras *a*, *b* y *c* para que se verifique

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$
$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c \ ?$$

Da unos cuantos valores, y comprueba que es siempre cierta.

133. Sacar factor común. — La igualdad (1) del núm. 132 invertida, se expresa así:

$$4 \ . \ 3 + 5 \ . \ 3 = (4 + 5) \ . \ 3$$

Todos los términos del primer miembro de esta *igualdad* contienen el factor 3; es *un factor común* a todos los términos.

Cuando se reemplaza el primer miembro por el segundo se dice que *se ha sacado 3 factor común.*

EJEMPLOS:

$$7 \times 15 + 7 \times 17 = 7 \times (15 + 17)$$
$$7 \times 20 - 7 \times 17 = 7 \times (20 - 17)$$
$$7\,x + 8\,x = x.\ (7 + 8) = x.\ 15 = 15\,x$$
$$23\,x - 20\,x = x.\ (23 - 20) = x.\ 3 = 3\,x$$

EJERCICIOS

1. Luis tiene 5 chaquetas y 3 pantalones. ¿Cuántos trajes distintos puede ponerse?

2. Sea el conjunto A = {2, 4, 6}. ¿Cuántos elementos tienen 4 conjuntos coordinables con él?

3. Pon en forma de producto las sumas siguientes:

9 libros + 9 libros + 9 libros + 9 libros;

$$\overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB};$$
$$345 + 345 + 345 + 345 + 345 + 345 + 345.$$

4. Pon en forma de sumas los productos siguientes:

5 lápices × 4; $\quad \widehat{AVB} \times 5; \quad 37 \times 6.$

5. Escribe de dos maneras diferentes el producto de los números 28 y 35.

6. Escribe todas las multiplicaciones de dos números naturales cuyo producto es *a*) 24; *b*) 56; *c*) 36; *d*) 48.

7. Completa la implicación siguiente, si *b* no es nulo:

$$b \times c = b \Rightarrow c = \ldots$$

Si b = 0, ¿qué puede decirse de c?

8. Completa la implicación siguiente:

$$b = 0 \Rightarrow b \times c = \ldots$$

9. Justifica las igualdades siguientes:

1.º $37 \times 5 = 30 \times 5 + 7 \times 5$.
2.º $2 \times 7 \times 5 \times 3 = 10 \times 21$.
3.º $98 \times 7 = 100 \times 7 - 2 \times 7$.
4.º $68 \times 5 = 34 \times 10$.

10. Halla la suma y la diferencia de:

1.º 784×38 y 784×12.
2.º $428 \times 13 \times 5$ y $428 \times 5 \times 7$.

11. Efectúa sacando factores comunes:

1.º $15 \times 13 + 15 \times 7 + 15 \times 20$.
2.º $7 \times 17 + 17 \times 13 + 17 \times 5$.
3.º $75 \times 21 + 75 \times 19$.
4.º $43 \times 104 - 43 \times 100$.
5.º $43 \times 75 - 75 \times 40$.
6.º $52 \times 17 - 52 \times 15$.

12. ¿En cuánto aumenta el número 6385 cuando se le multiplica por 12?

13. Halla el valor de las siguientes expresiones sin calcular previamente cada paréntesis:

a) $87 - 4\ (10 + 6)$
b) $(105 - 17)\ 6 + 73$
c) $(32 + 19 - 27)\ 7$
d) $(79 - 34 - 16)\ .\ 5$
e) $(215 - 187)\ (14 - 9)$
f) $166 - 7\ (18 - 7)$.

14. Halla el valor de los productos:

a) $4 \times 16 \times 25 \times 125$
b) $6 \times 7 \times 10 \times 36$.

15. Saca *x* factor común en:

1.º $5x + 12x + 13x$.
2.º $19x - 15x$.
3.º $ax + bx + cx + dx$.
4.º $4x - 7x + 8x - 3x$.

16. Efectúa las expresiones siguientes, sacando primero el factor común:

1.º $83 \times 17 + 17 \times 7$.
2.º $59 \times 24 + 41 \times 24$.
3.º $75 \times 107 + 25 \times 107$.
4.º $62 \times 47 - 47 \times 32$.
5.º $78 \times 53 - 28 \times 53$.
6.º $87 \times 114 - 87 \times 17 + 87$.
7.º $39 \times 43 + 40 \times 43 + 43 \times 20$.
8.º $77 \times 56 + 77 \times 24 - 15 \times 77$.
9.º $37 \times 68 - 37 \times 28 + 5 \times 37$.
10.º $840 \times 76 + 460 \times 76 - 298 \times 76$.

24

Práctica de la multiplicación

No se trata en esta lección de que aprendas a multiplicar, lo que ya sabes desde las clases primarias. Se trata simplemente de que entiendas por qué multiplicas como lo haces.

El caso primero, en que los dos factores son de una sola cifra, se resuelve mediante la tabla de multiplicar o tabla de Pitágoras que va en el número 123 de la lección 22.

134. Caso segundo: multiplicación de dos números de los cuales uno tiene una sola cifra. —1.° Sea la multiplicación 321 × 3.

Se tiene:

$$321 \times 3 = (3 \text{ centenas} + 2 \text{ decenas} + 1) \times 3$$
$$= 3 \times 3 \text{ centenas} + 2 \times 3 \text{ decenas} + 3 = 963.$$

en donde se ha aplicado la propiedad distributiva.

2.° Se procede de igual manera para efectuar la siguiente multiplicación:

$$586 \times 7 = (5 \text{ centenas} + 8 \text{ decenas} + 6) \times 7$$
$$= 35 \text{ centenas} + 56 \text{ decenas} + 42$$

Pero en este caso el número de unidades de órdenes sucesivos es superior a 9 y hay que efectuar traslados de un orden al orden superior.

En la práctica la operación se dispone así, y se hacen los traslados mentalmente:

$$\begin{array}{r} 586 \\ \times\ 7 \\ \hline 4102 \end{array}$$

135. Caso tercero: multiplicación de dos números de los cuales uno termina por uno o más ceros. —Sea calcular 538 × 7000. Ya que la multiplicación es conmutativa, se puede escribir:

$$7 \text{ miles} \times 538,$$

con lo cual estamos en el caso segundo. Así que:

$$538 \times 7000 = 7 \text{ miles} \times 538 = 3766 \text{ miles} = 3766000$$

136. Caso cuarto: multiplicación de dos números cualesquiera. — Sea calcular 7456 × 382. Este producto puede escribirse

$$7456 \times (300 + 80 + 2)$$

al que puede aplicarse la propiedad distributiva:

$$7456 \times 382 = 7456 \times 300 + 7456 \times 80 + 7456 \times 2$$

Ahora podemos aplicar los casos tercero y cuarto. En la práctica se invierte el orden de estos sumandos, o sea:

$$7456 \times 382 = 7456 \times 2 + 7456 \times 80 + 7456 \times 300$$

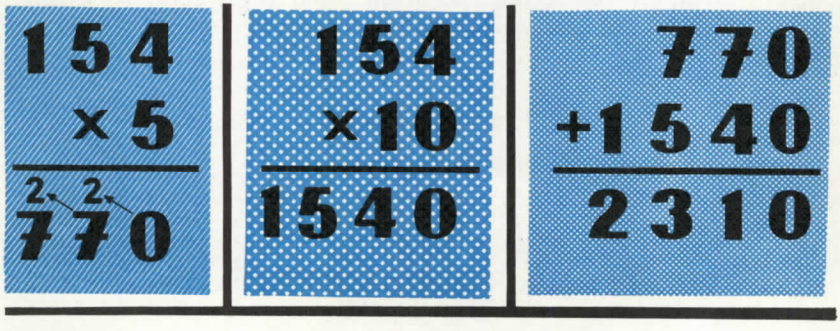
Lo cual conduce a disponer la operación como se indica a continuación.

Por costumbre se suprimen los ceros que terminan los productos parciales y así resulta la disposición ya conocida de esta operación:

$$\begin{array}{r} 7456 \\ \times\ 382 \\ \hline 14912 \\ 596480 \\ 2236800 \\ \hline 2848192 \end{array}$$

EJEMPLO. *María tiene 15 álbumes con 154 cromos cada uno. ¿Cuántos cromos tiene en total?*

Tiene (154 × 15) cromos. Como 15 = 10 + 5, según la propiedad distributiva de la multiplicación (núm. 132), para realizar esta operación procederemos así:



137. Prueba de la multiplicación. — Se efectúa la multiplicación invirtiendo el orden de los factores. Si el producto es el mismo, la operación está bien hecha. Esto en virtud de la propiedad conmutativa.

138. Caso particular. — *Los factores terminan en ceros.*
Sea multiplicar 37600 por 240.
Por la propiedad asociativa se tiene:

$$37600 \times 240 = 376 \times 100 \times 24 \times 10$$

Por la propiedad conmutativa:

$$376 \times 100 \times 24 \times 10 = 376 \times 24 \times 100 \times 10$$

Y esto, por la definición de producto de varios factores, da sucesivamente:

$$9064 \times 100 \times 10 = 906400 \times 10 = 9064000$$

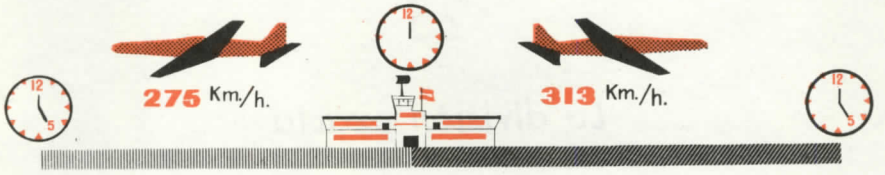
REGLA. — *Se efectúa la multiplicación como si los ceros no existieran; pero a la derecha del producto se escriben tantos ceros como haya en los dos factores.*

EJERCICIOS

Efectúa las multiplicaciones siguientes:

1.	7296 × 35000.	**7.**	46988 × 3550.	**13.**	708321 × 393.
2.	67896 × 3002.	**8.**	83006 × 469.	**14.**	431598 × 870.
3.	78269 × 1204.	**9.**	78503 × 128.	**15.**	527932 × 2005.
4.	32968 × 2009.	**10.**	64932 × 247.	**16.**	387629 × 5076.
5.	46928 × 3050.	**11.**	86943 × 215.	**17.**	796387 × 8030.
6.	69321 × 5000.	**12.**	78694 × 468.	**18.**	831703 × 9804.

19. Dos aviones desarrollan velocidades de 275 y 313 km/h, respectivamente. Si salen del mismo punto y en sentidos opuestos, ¿a qué distancia estarán uno de otro después de 5 horas?



20. El mismo problema anterior si los dos aviones van en el mismo sentido.

21. Después de comprar 5 balones de 275 pesetas cada uno, 3 pares de botas de 160 pesetas cada uno y 11 camisetas de 84 pesetas una, nos sobran 342 pesetas. ¿Cuánto dinero teníamos?

22. Un librero ha vendido 246 libros a 35 ptas. cada uno. ¿Cuál es el importe de la venta?

23. Nuestro patio de recreo tiene 18 m de largo y 12 m de ancho. ¿Qué superficie tiene?

24. El sonido recorre 340 m por segundo. Durante una tormenta se ha oído el trueno después de 15 s de verse el relámpago. ¿A qué distancia se produjo el rayo?

25. ¿Qué peso transporta un camión que lleva 12 sacos de trigo de 85 kg cada uno, 7 sacos de cebada de 76 kg cada uno y 15 sacos de arroz de 108 kg cada uno?

26. Un comerciante vende 15 m de una pieza de seda a 256 ptas. metro, y 6 m de terciopelo a 185 ptas. metro. Gana en total 750 ptas. ¿Cuánto le costaron dichos tejidos?

25

La división exacta

139. Cociente exacto. — *El profesor va a repartir 12 lápices de colores entre 3 alumnos. ¿Cuántos lápices le tocan a cada uno?*

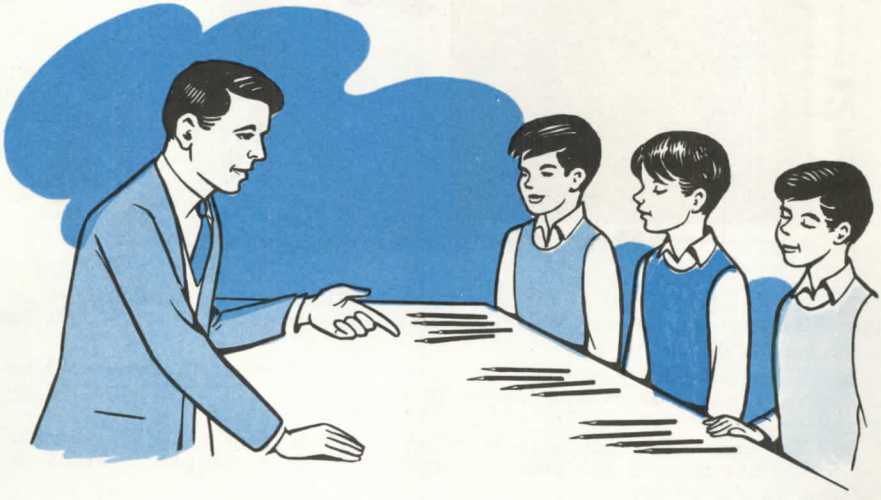
Solución. — El problema se reduce a buscar qué número multiplicado por 3 da 12. A cada alumno le tocarán 4 lápices, pues

$$12 = 3 \times 4$$

Esta operación se llama **división exacta** y se representa así:

$$\frac{12}{3} = 4 \quad ; \quad 12 : 3 = 4$$

El número total de lápices, 12, se llama **dividendo.**
El número de alumnos, 3, se llama **divisor**.
El número de veces que el divisor está contenido en el dividendo, 4, se llama **cociente exacto.**



Por tanto, según la definición dada

$$\frac{12}{3} = 4 \Longleftrightarrow 12 = 3 \cdot 4$$

EJEMPLOS. 1. Halla los siguientes cocientes exactos:

$$\frac{12}{6} \; ; \; \frac{81}{9} \; ; \; \frac{72}{8} \; ; \; \frac{56}{7} \; ; \; \frac{48}{6}$$

2. En los ejemplos anteriores di en cada caso cuál es el dividendo, el divisor y el cociente exacto.

3. En una clase hay 48 alumnos repartidos en 6 filas. ¿Cuántos alumnos hay en cada fila?

Hay en cada fila:

$$\frac{48}{6} = 8 \text{ alumnos.}$$

4. Un comerciante ha vendido 5 cajas de naranjas, y en total 400 naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene cada caja?

Cada caja tiene

$$\frac{400}{5} = 80 \text{ naranjas.}$$

140. Equivalencias fundamentales. — Sabemos que

$$\frac{12}{3} = 4 \Longleftrightarrow 12 = 3 \times 4$$

Pero ¿no equivalen también a otra cosa estas dos expresiones? Efectivamente, dividiendo 12 entre 4 obtenemos como cociente el 3. Luego

$$\frac{12}{3} = 4 \Longleftrightarrow 12 = 3 \times 4 \Longleftrightarrow \frac{12}{4} = 3$$

Cualquiera de las tres igualdades que sea cierta, lo son también las otras dos. Y basta que una de ellas sea falsa, lo son igualmente las otras dos.

EJEMPLOS. 1. Halla las otras dos equivalencias fundamentales de las siguientes:

$$\frac{24}{6} = 4 \; ; \quad 36 = 9 \times 4 \; ; \quad \frac{54}{9} = 6$$

2. ¿Qué número hemos de escribir dentro del cuadrado para que sea cierta la igualdad

$$\frac{\square}{7} = 9\,?$$

Basta que escribas las equivalencias fundamentales:

$$\frac{\square}{7} = 9 \Longleftrightarrow \square = 7 \times 9 \Longleftrightarrow \frac{\square}{9} = 7$$

De las tres siempre hay una en que la incógnita está despejada, o sea aislada en un miembro. En este caso

$$\square = 7 \times 9 = 63$$

que es el valor que hemos de poner dentro del cuadrado en las tres equivalencias.

3. ¿Qué valor hemos de dar a la letra x en la igualdad?

$$6 \,.\, x = 54\,?$$

Escribamos las equivalencias fundamentales:

$$6 \,.\, x = 54 \Longleftrightarrow \frac{54}{x} = 6 \Longleftrightarrow \frac{54}{6} = x$$

Por tanto $\quad x = \dfrac{54}{6} = 9.$

141. Trasposición de factores y divisores. — EJEMPLO 1.º *Para pesar un queso, se lo divide en 7 partes iguales y se pesa uno de los trozos. Son 100 gramos. ¿Cuánto pesa el queso?*

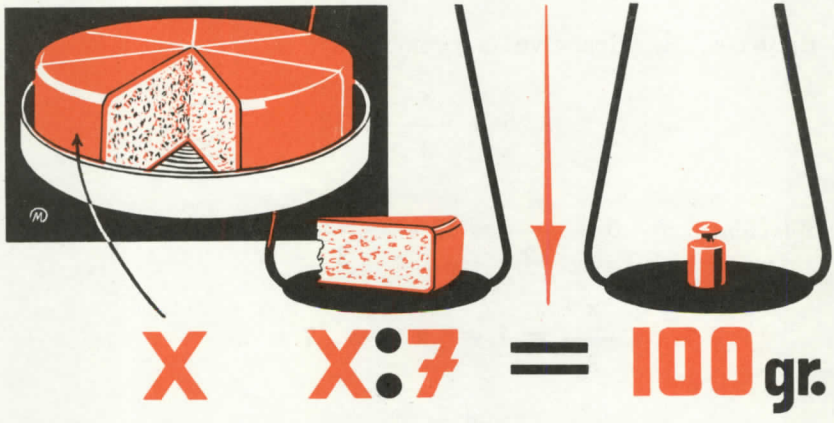
Llamando x el peso del queso, el de una de las partes es $\dfrac{x}{7}$;

y se tiene

$$\frac{x}{7} = 100 \text{ gramos}$$

Escribiendo las equivalencias fundamentales

$$\frac{x}{7} = 100 \iff x = 7 \,.\, 100 = 700 \text{ gramos}$$



Ejemplo 2.° De la igualdad:

$$5 \,.\, x = 30$$

se deduce, según las equivalencias fundamentales

$$x = 30 : 5 = 6$$

Regla. — En una *igualdad, un número que está como factor en un miembro, se pasa al otro como divisor, y el que está como divisor en un miembro se traspone al otro como factor.*

Ejemplo 3.° Despeja x en la ecuación

$$x \,.\, 8 = 56$$

Será

$$x = \frac{56}{8} = 7$$

142. Aplicación de las equivalencias de la sustracción y de la división. — *Ecuación* es una igualdad que solamente es cierta para algún valor particular de su letra, llamada *incógnita*, o cantidad desconocida.

Despejar una incógnita en una ecuación es dejarla aislada en un miembro de modo que se pueda hallar su valor.

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que satisface a la ecuación.

Para resolver muchas ecuaciones se necesita aplicar tanto las equivalencias de la sustracción como las de la división.

EJEMPLOS. 1. Resuelve la ecuación

$$5 + \frac{x}{3} = 12$$

Solución:
$$5 + \frac{x}{3} = 12 \iff \frac{x}{3} = 12 - 5 = 7$$

$$\frac{x}{3} = 7 \iff x = 3 \,.\, 7 = 21$$

2. Resuelve la ecuación $\dfrac{8 + x}{5} = 4$

Solución:
$$\frac{8 + x}{5} = 4 \iff 8 + x = 5 \,.\, 4 = 20$$

$$8 + x = 20 \iff x = 20 - 8 = 12$$

3. Hallar x en la igualdad:

$$5 \,.\, x - 62 = 18$$

Transponiendo términos se tiene:

$$5 \,.\, x = 18 + 62 = 80$$

Pasando al segundo miembro el factor 5:

$$x = 80 : 5 = \mathbf{16}$$

143. El cociente exacto de dos números no siempre existe. — Si tratamos de hallar el cociente exacto $\frac{14}{5}$, vemos que no hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé 14. Luego no existe dicho cociente exacto.

Del mismo modo se pueden dar otros muchos casos.

EJEMPLOS. 1. En las siguientes igualdades di cuáles tienen sentido y cuáles no:

$$\frac{16}{x} = 4 \quad ; \quad \frac{x}{10} = 12 \quad ; \quad \frac{18}{2} = x \quad ; \quad x = \frac{32}{7}$$

Calcula el valor de x en las igualdades en que se pueda.

2. Da ejemplos de divisiones que no den cociente exacto.

EJERCICIOS

Deduce el valor de x de las siguientes igualdades:

1. $3x = 36$
2. $8x = 176$
3. $x/7 = 83$
4. $17x - 21 = 166$
5. $3x + 18 = 36$
6. $15 + 10x = 735$
7. $6x - 240 = 0$
8. $52 = 7x - 116$
9. $10 - 3x = 4$
10. $(x/5) + 18 = 33$
11. $56 - (x/8) = 53$
12. $28 + 4x = 80$
13. $6x + 220 = 760$
14. $2x + 35 = 65$
15. $307 = 125 + 7x$

Para las siguientes igualdades, que tú completarás, escribe las otras dos equivalencias fundamentales:

16. $7 \times 11 = \ldots$
17. $\frac{45}{5} = \ldots$
18. $\frac{42}{6} = \ldots$
19. $8 \times 7 = \ldots$
20. $\frac{72}{9} = \ldots$
21. $\frac{48}{6} = \ldots$

22. Halla dos números enteros consecutivos cuya suma es 95.

23. Halla dos números pares consecutivos cuya suma es 50.

24. Si a las bolas de Luisito se añaden las 12 bolas de Manolo, y el total se distribuye en 12 montones, resulta que cada uno de los montones contiene 7 bolas. ¿Cuántas bolas tiene Luisito? Plantea una ecuación para este problema, y resuélvelo.

25. Halla x en la ecuación

$$5 + \frac{x - 7}{3} = 12$$

Inventa tú un problema que responda a dicha ecuación.

26

La división entera

144. Cociente entero. —*El profesor va a repartir 14 lápices de colores entre 3 alumnos. ¿Cuántos lápices le tocan a cada uno?*

Observa que después de repartir 4 lápices a cada alumno, quedan todavía 2 lápices, con los cuales no hay para dar 1 lápiz más a cada alumno.

La operación efectuada se llama **división entera.** El número de lápices que se reparte se llama **dividendo,** o sea 14. El número de alumnos entre los que se reparte se llama **divisor,** o sea 3. El número de lápices que tocan a cada alumno, o sea 4, se llama **cociente entero.** El número de lápices sobrantes, 2, se llama **resto** de la división.

Es evidente que este resto de la división tiene que ser menor que el divisor, 3; porque si sobraran más de 3 lápices, se podría dar 1 más a cada alumno. Luego se puede escribir

$$14 = 3 \times 4 + 2 \quad ; \quad 2 < 3$$

Y en general

$$\mathbf{D = d \times c + r \quad ; \quad r < d}$$

llamando D al dividendo, *d* al divisor, *c* al cociente y *r* al resto.

EJEMPLO. 1. Hallar r y c en la ecuación

$$37 = 5 \times c + r \ , \ r < 5$$

y di cuál es el dividendo, cuál el divisor y cuál el cociente y el resto en la división anterior. El cociente entero es $c = 7$, y el resto, $r = 2$.

2. Se quieren colocar 25 papelitos en filas de 4 en fondo. ¿Cuántas filas resultan? ¿Sobra algún papelito? Escribe las dos expresiones de la división entera efectuada, y di cuál es el dividendo, divisor, cociente entero y resto. El cociente entero: 6 filas; el resto: 1 papelito.

3. Hoy es domingo. ¿Qué día de la semana será dentro de 47 días? Observa que dividiendo 47 entre 7 días de la semana da 6 semanas de cociente entero y 5 días de resto. El 5.º día de la semana es el viernes. Luego dentro de 47 días será viernes.

145. Propiedad de la división entera. — *Luis tiene 47 cromos, y quiere repartirlos entre 8 niños. ¿Cuántos cromos dará a cada niño?*

Dando a cada niño 5 cromos, ha repartido en total $5 \times 8 = 40$ cromos, y sobran 7 cromos. Luego el cociente entero es 5, y el resto, 7, y podemos escribir

$$47 = 8 \times 5 + 7 \ ; \ 7 < 8$$

¿Qué ocurre si multiplicamos por 3 los dos miembros de la igualdad anterior? Resulta

$$47 \times 3 = (8 \times 5 + 7) \times 3 = (8 \times 5) \times 3 + 7 \times 3$$

en virtud de la propiedad distributiva de la multiplicación.

Podemos escribir así la igualdad anterior

$$47 \times 3 = (8 \times 3) \times 5 + 7 \times 3$$

en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación. La última igualdad nos dice que el cociente entero de dividir 47×3 entre 8×3 es también 5, como antes, pero el resto es ahora 7×3. Comprobamos que $7 \times 3 < 8 \times 3$, como debe ser. Por tanto, *si se multiplica el dividendo y el divisor de una división entera por un mismo número, el cociente entero no varía, pero el resto queda multiplicado por dicho número.*

EJEMPLOS. 1. Un niño reparte 43 pesetas entre 5 pobres. Halla el cociente entero y el resto. Escribe

$$43 = 5 \times 8 + 3 \ ; \ 3 < 5$$

Si ahora reparte $43 \times 4 = 172$ pesetas entre $5 \times 4 = 20$, di, sin hacer la división, cuál es el cociente, y cuál el resto.

2. Las dos divisiones enteras

$$48 : 9 \quad ; \quad 240 : 45$$

¿dan el mismo cociente?, ¿el mismo resto? Contesta sin hacer la división. Observa que los términos de la segunda son iguales a los de la primera multiplicados por 5.

146. Práctica de la división: primer caso. — *La mamá quiere repartir 53 caramelos entre sus 8 hijos. ¿Cuántos le tocarán a cada uno?*

A cada uno le tocan $53 : 8$.

Para efectuar esta división basta recordar la tabla de multiplicar, y ver cuál es el mayor número que multiplicado por el divisor 8 da un producto menor que el dividendo 53. Es 6 el cociente entero y 5 el resto, pues

$$53 - 8 \times 6 = 5$$

147. Segundo caso. — *Un industrial quiere repartir 27134 pesetas entre los 86 obreros de su fábrica, por partes iguales. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?*

Le tocan a cada uno $(27134 : 86)$ pesetas.

Para efectuar esta división notemos que la cantidad a repartir se compone de 271 billetes de cien pesetas, 3 montones de diez pesetas y 4 monedas sueltas.

Distribuidos los 271 billetes entre los 86 obreros, tocan 3 billetes a cada uno, según se ve al margen, y sobran 13 billetes, que no se pueden repartir.

271	86
13	3

Los 13 billetes que han sobrado equivalen a 130 montones de diez pesetas. Estos, con los 3 que ya teníamos, hacen 133 montones, que repartidos entre los 86 obreros, corresponden 1 a cada uno y sobran 47 montones.

133	86
47	1

Los 47 montones contienen 470 pesetas, que con las 4 ya existentes hacen 474 pesetas. Distribuidas éstas, tocan 5 a cada obrero y sobran 44 pesetas.

474	86
44	5

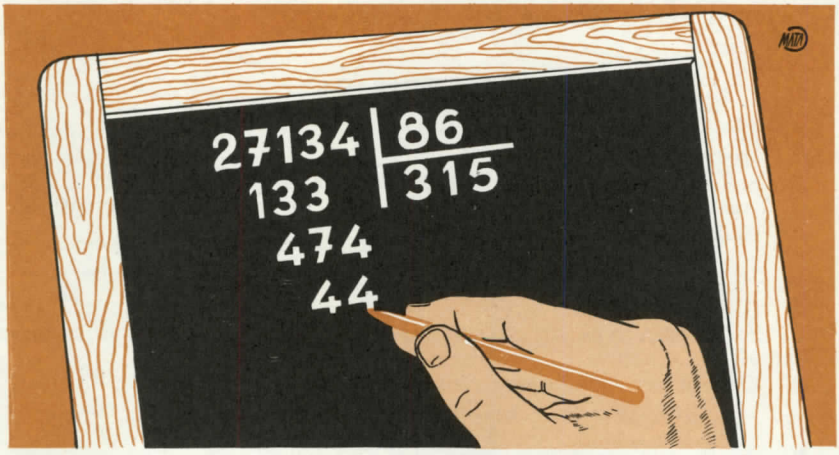
Así, pues, han tocado a cada obrero 3 billetes de cien, 1 montón de diez y 5 pesetas sueltas, o sea:

$$300 + 10 + 5 = \mathbf{315\ ptas.}$$

Los cálculos se disponen así:

1.er dividendo parcial

dividendo →	27134	86 ←	divisor
2.º dividendo parcial →	133	315 ←	cociente
3.er dividendo parcial →	474		
Resto →	44		



Nota. — Cuando un dividendo parcial es inferior al divisor se escribe cero en el cociente, se baja la cifra siguiente del dividendo y se continúa la operación.

CÁLCULO MENTAL

- **Divide** por 2 los números siguientes:
  48, 54, 66, 96, 246, 576, 834, 936
- **Halla** mentalmente la tercera parte de:
  51, 57, 69, 93, 141, 165, 234, 336
- **Divide** por 5 los números siguientes:
  60, 75, 80, 95, 145, 230, 365, 460

Observa que para dividir por 5 basta multiplicar por 2 y dividir por 10.

- **Halla** mentalmente cuál es el cociente y el resto de las divisiones
  327 : 10 ; 5814 : 100 ; 11589 : 1000

:	36	54	72	90	126
2					
6					
9					
3					

:	24	72	96	120	144
8					
3					
2					
4					

- **Divide** cada número de la fila horizontal por cada número de la fila vertical, en los cuadros anteriores.

EJERCICIOS

1. En una división el divisor es 13. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener el resto?

2. Siendo el divisor 2136 y el cociente entero 49, calcular el dividendo: 1.º, si el resto es el mayor posible; 2.º, si el dividendo es el menor posible.

3. Halla c y r en la ecuación

$$78 = 8 \times c + r \;\; ; \;\; r < 8$$

4. ¿Cómo repartirías 30 pesetas entre 4 niños?

5. Se quieren repartir 140 canicas entre 13 niños. ¿Cuántas le tocan a cada uno?

6. Efectúa las siguientes divisiones enteras:

$$42 : 5 \;\; ; \;\; 60 : 7 \;\; ; \;\; 85 : 8 \;\; ; \;\; 104 : 12.$$

7. En 48 días, ¿cuántas semanas y días hay?

8. Hoy es domingo. ¿Qué día de la semana será dentro de 58 días?

9. En 148 horas, ¿cuántos días y horas hay?

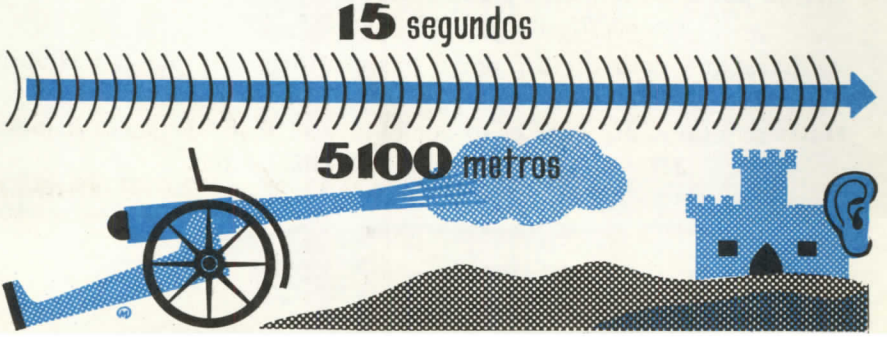
10. Un señor tiene 143 pesetas. ¿Cuántos duros son?

11. De la igualdad $1007 = 19 \times 53$ deduce dos divisiones exactas.

12. Efectúa las siguientes divisiones:

a) 68676 : 59
b) 44118 : 86
c) 272741 : 47
d) 317186 : 38
e) 193248 : 198
f) 280836 : 348
g) 1701623 : 847
h) 6444324 : 774

13. El estampido de un cañón colocado a 5100 m de distancia se ha oído 15 segundos después de verse el fogonazo. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire y cuánto tarda en recorrer 8500 m?



14. Las sábanas de la cama tienen de ordinario 3 m de longitud. ¿Cuántos pares de sábanas se obtendrán de una pieza de 90 m de larga?

15. La distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de km. ¿Cuánto tiempo emplearía en llegar hasta allí un proyectil-cohete que caminara a una velocidad de 1200 km/h?

16. Un tendero compra 27 docenas de huevos a 15 pesetas la docena y se le rompen 3 docenas. ¿A cómo debe vender las que le quedan si quiere ganar 75 pesetas?

17. ¿Cuánto ahorra mensualmente un señor cuyos ingresos anuales son de 275000 pesetas, y sus gastos de 246680?

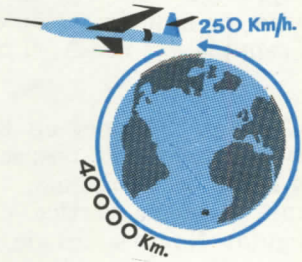
18. Andrés dice a Enrique: Si los años que tengo los multiplicas por 25, y el resultado lo divides por 6, obtendrás 50. ¿Qué edad tiene Andrés?

19. ¿Cuántos días tardará en vaciarse un tonel de 624 litros, si cada día se gastan 24?

20. ¿Cuántos caballos de 2540 pesetas pueden comprarse con 68827 pesetas, y cuánto dinero sobra?

21. Sabiendo que un meridiano terrestre mide 40000 kilómetros, ¿cuántos días empleará en recorrerlo un avión que vuele 16 horas cada día a 250 km/h?

22. Un grifo arroja 125 m^3 de agua en una hora. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 43250 m^3?



23. El vino de un tonel costó 1296 pesetas, y el que queda después de extraer 54 litros vale 1134 pesetas. ¿Cuánto valen los 54 litros? ¿Cuál es el precio de un litro? ¿Cuántos litros había en el tonel?

24. Sabiendo que 74 litros de aceite cuestan 592 pesetas, hallar el coste de 217 litros de dicho aceite. ¿Cuántos litros del mismo se podrán comprar con 29384 pesetas?

25. Un señor reparte 1537 pesetas entre varios niños. Para que le tocaran 62 pesetas a cada uno han faltado 13 pesetas. ¿Cuántos niños había?

26. Al distribuir 475 caramelos entre los alumnos de una clase, han correspondido 12 a cada alumno y han sobrado 19 caramelos. ¿Cuántos alumnos había en clase?

27. ¿Qué velocidad lleva un avión que en 7 horas ha recorrido 2198 km?

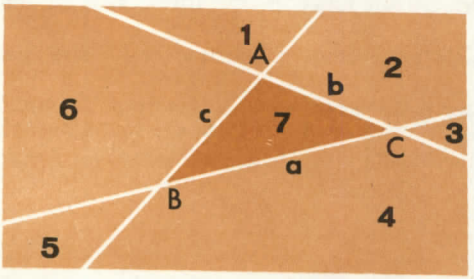
28. ¿Cuántos clavos se pueden obtener de un alambre de 128475 mm, si cada clavo mide 25 mm?

29. ¿Cuánto costarán 55 libros, si 12 cuestan 288 pesetas?

27

Triángulos

148. El triángulo. — Toma una cuartilla y traza en ella tres rectas, *a*, *b* y *c*, que se corten dos a dos dentro de la misma. Nombra A, B y C estos puntos de intersección: A, el que no es incidente con la recta *a*; B, el que no es incidente con la recta *b*, y C, el que no está en la recta *c*.



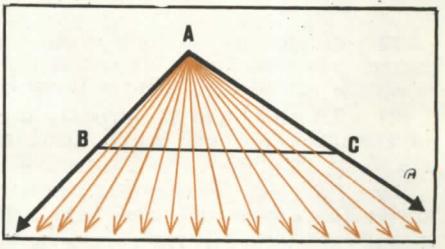
¿Cuántas regiones determinan estas tres rectas en el plano? Observa que, de ellas, 6 regiones son ilimitadas, y sólo una, la 7, es limitada.

Fíjate en esta región 7. Resulta ser la intersección de tres semiplanos: el aA, el bB y el cC. Esta región se llama **triángulo.**

Ejemplos. 1. Recorta con las tijeras la región 7: tienes en tus manos un triángulo ABC. Observa su borde: se compone de tres segmentos rectilíneos, AB, BC y CA, llamados **lados** del triángulo.

Cada dos lados tienen un punto común, llamado **vértice** del triángulo. ¿Cuántos vértices tiene un triángulo? Nombra los de la figura anterior.

2. Toma otra cuartilla y traza un triángulo ABC. Prolonga los lados AB y AC, y considera las semirrectas AB y AC. Forman un ángulo que contiene al triángulo ABC. Lo mismo sucede con los ángulos ABC y ACB, que también contienen al triángulo ABC. Luego el **triángulo está contenido en tres ángulos,** tantos como lados.

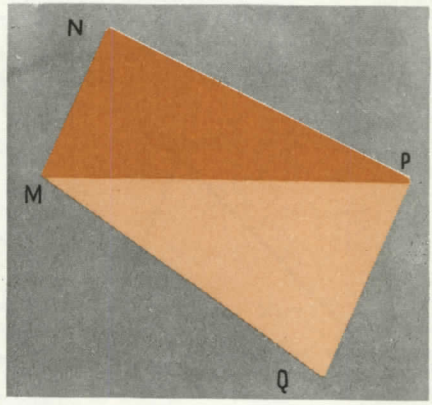


Precisamente la palabra «triángulo» significa «tres ángulos».

Encontrarás muchos libros que dicen que «el triángulo tiene tres ángulos». Entiende que propiamente debe decirse que «el triángulo está contenido en tres ángulos».

3. Dibuja varios triángulos y recórtalos. Pon letras en sus vértices y nómbralos. Nombra también sus lados y sus ángulos.

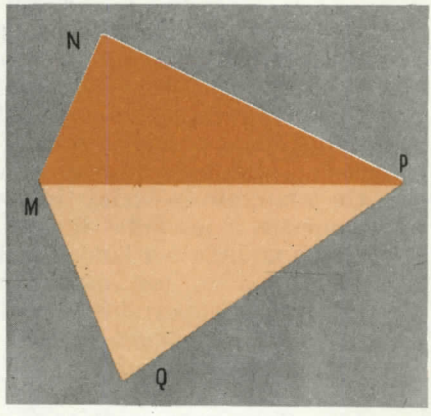
149. Triángulos consecutivos. — Dibuja dos triángulos como MNP y PQM que tengan un lado MP común, y nada más en común. Se llaman **triángulos consecutivos.**



EJEMPLOS. 1. Recorta los dos triángulos, MNP y PQM, que acabas de dibujar, e intenta colocarlos en otra forma, pero de modo que sean consecutivos. No te será difícil esta segunda figura, sencillamente dando vuelta al triángulo PQM.

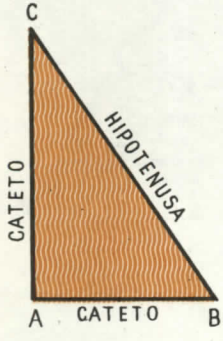
2. Nombra la figura resultante del ejercicio anterior, nombra también los ángulos de su borde y sus ángulos. Éstos, ¿son convexos o cóncavos?

3. Dibuja tres triángulos que sean consecutivos cada uno con el siguiente. Nombra la figura resultante, sus lados y sus ángulos.



150. Triángulos rectángulos. — Observa una escuadra. Tiene forma de triángulo, pero con una particularidad: uno de sus ángulos es recto. Por eso se le llama *triángulo rectángulo.*

Al lado opuesto al ángulo recto se le llama *hipotenusa*; a los lados que forman el ángulo recto se les llama *catetos.*



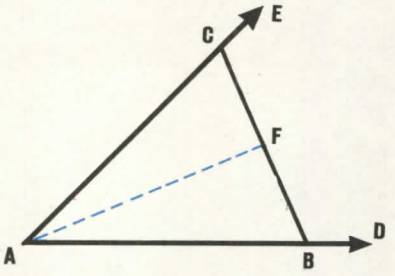
EJEMPLOS. 1. Mediante doblado de papel, traza un ángulo recto. Toma un punto en cada uno de sus lados. Une entre sí estos dos puntos y recorta el triángulo rectángulo que resulta.

2. Repite la construcción anterior utilizando la escuadra para trazar el ángulo recto.

3. Un triángulo ¿puede tener dos ángulos rectos? No, porque no se cortarían.

4. Pon letras en los vértices de los triángulos rectángulos que has construido, y nombra sus hipotenusas y sus catetos.

151. Triángulos isósceles. — Construye un triángulo que tenga dos lados iguales. Para ello en papel transparente dibuja un ángulo DAE. Toma sobre AD un punto cualquiera B. Dobla por la bisectriz del ángulo y señala con la letra C el punto en que cae B. Después de desdoblar une B con C. El triángulo ABC tiene dos lados iguales, pues AB = AC.



Un triángulo con dos lados iguales se llama *isósceles*. El triángulo ABC es, por tanto, isósceles.

EJEMPLOS. 1. Recorta el triángulo ABC que has dibujado anteriormente. Dobla por la bisectriz AF. El triángulo ABF se superpone sobre el AFC.

Una recta, como la AF, que divide a una figura en dos partes iguales, tales que doblada la figura por la recta, una parte coincide con la otra, se llama **eje de simetría** de la figura.

Por tanto, AF es eje de simetría del triángulo isósceles.

Un triángulo isósceles tiene siempre un eje de simetría.

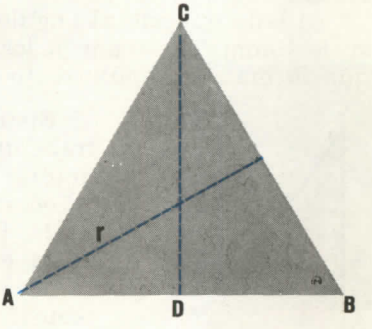
2. ¿Cómo son los ángulos B y C de la figura anterior? Se superponen en el doblado. Luego son iguales.

Un triángulo isósceles tiene siempre dos ángulos iguales, que son los opuestos a los lados iguales.

En un triángulo a lados iguales, se oponen ángulos iguales.

3. ¿Cómo son los ángulos en F? Son adyacentes, y además iguales, ya que se superponen en el doblado. Luego son rectos. *La bisectriz AF es perpendicular al lado opuesto en su punto medio.* Luego es **mediatriz** de dicho lado.

152. Triángulo equilátero.— Construye un triángulo que tenga los tres lados iguales. Para ello traza un segmento AB y su mediatriz CD. Dobla ahora por una recta *r* que pase por A y de modo que B caiga sobre la mediatriz CD. El punto C en que cae B es el tercer vértice del triángulo pedido; pues AB = AC, por construcción; AC = BC, por ser C un punto de la mediatriz.



Un triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama **equilátero.** El triángulo ABC es equilátero.

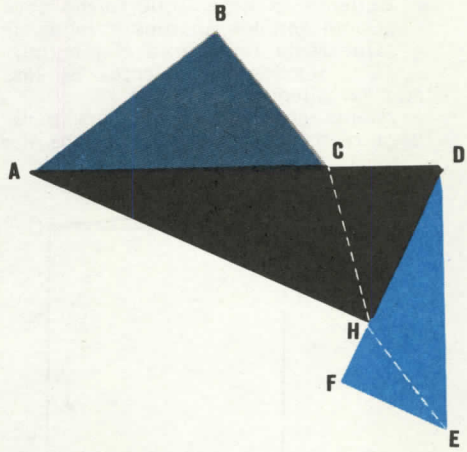
EJEMPLOS. 1. ¿Es isósceles un triángulo equilátero?
Es isósceles desde los tres vértices.

2. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero? Tiene 3 ejes de simetría.

3. ¿Cómo son las tres bisectrices interiores de un triángulo equilátero respecto a los lados opuestos? Son mediatrices de los lados opuestos.

EJERCICIOS

1. Dibuja triángulos de diversas formas, y recórtalos. Intenta colocarlos uno al lado de otro, de modo que cada dos tengan un vértice y un lado común. Nombra la figura que así resulta después de pegar los triángulos con papel de celofán.

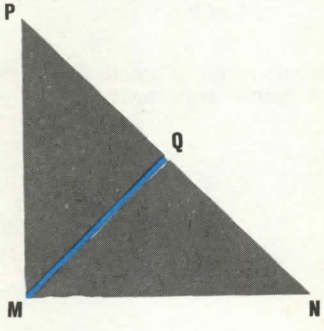


2. En la figura ABCDEFH anterior, ¿qué ángulos son convexos y cuáles son cóncavos?

3. ¿Son consecutivos los triángulos ABC, ADH y DEF de la figura anterior? ¿Cómo podrías obtener otros triángulos que diesen lugar a la misma figura y que fuesen consecutivos? Bastaría trazar los segmentos CH y EH, con lo que se obtienen los triángulos ABC, ACH, HCD, DHE y HEF, que son consecutivos cada uno con el siguiente.

4. ¿Un triángulo puede tener algún ángulo cóncavo?

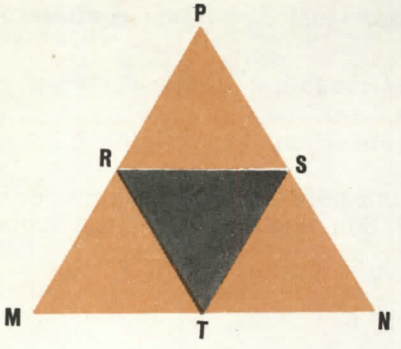
5. Traza un triángulo rectángulo isósceles. Toma para ello un segmento MN, traza en su extremo M una perpendicular, y toma en ella un segmento MP igual al MN. Une luego P con N. En el triángulo MNP así obtenido, ¿cuáles son los lados iguales? ¿Y los ángulos iguales?



6. En la figura anterior halla el eje de simetría.

7. Un triángulo equilátero tiene un lado de 128 cm de longitud. ¿Cuál es el perímetro de dicho triángulo, esto es, la longitud de su borde?

8. Toma tiras de cartón de diversas longitudes. Haz un agujero en cada extremo, de modo que pueda pasar por él un encuadernador. Construye de este modo *triángulos isós-*



celes, uniendo mediante encuadernadores dos tiras iguales y otra cualquiera, y *triángulos equiláteros*, uniendo tres tiras iguales. Construye también por este método triángulos cualesquiera.

9. En los triángulos anteriores señala los ejes de simetría.

10. Construye un triángulo y recórtalo. Sea el triángulo MNP de la figura. Halla los puntos medios de los lados R, S y T, mediante doblado del papel. Dobla en seguida por las rectas RS, ST y TR. Comprueba, por superposición, que los cuatro triángulos que has obtenido son iguales.

11. Pliega una hoja de papel. Córtale una esquina como indica la figura 1.ª. Extiende la hoja; ¿qué forma observas? Nómbrala.
¿Cómo son los ángulos y lados del triángulo?
¿Qué recta representa el pliegue?
¿Qué puedes decir acerca de las dos partes del triángulo a uno y otro lado del pliegue?
¿Cómo cortarías la esquina para que uno de los ángulos del triángulo fuera recto? Haz algunos ensayos y después traza una figura.

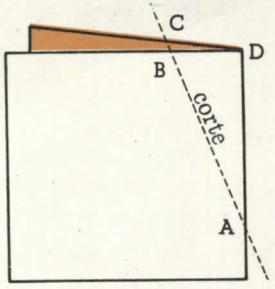


Fig. 1.ª

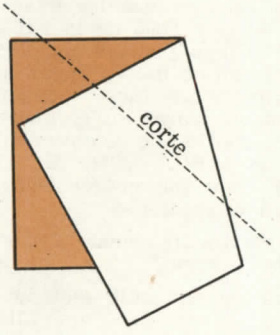


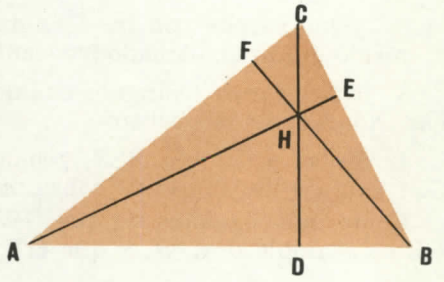
Fig. 2.ª

12. Pliega una hoja de papel con un pliegue oblicuo como indica la figura 2.ª. Antes de cortar la esquina, ¿puedes decir qué forma resultará?
Corta la esquina como se indica.
¿Qué representa el pliegue?

28

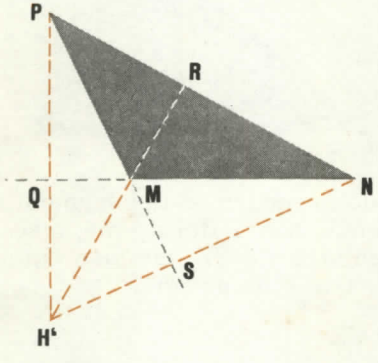
Propiedades de los triángulos

153. Alturas de un triángulo. — Dibuja un triángulo ABC, y traza desde el vértice C una recta perpendicular al lado opuesto. Es CD. Toda recta incidente con un vértice y perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto se llama **altura del triángulo.** La recta CD es, por tanto, una altura del triángulo ABC.



En los libros unas veces se llama altura a la recta CD, y otras al segmento de la misma comprendida entre el vértice C y el pie de la perpendicular D, o sea al segmento CD. En cada caso deberás distinguir, por el contexto, si trata de una cosa o de otra.

EJEMPLOS. 1. ¿Cuántas alturas puedes trazar en un triángulo? Traza las tres en el triángulo ABC anterior, primero mediante doblado de papel, y segundo mediante la escuadra.

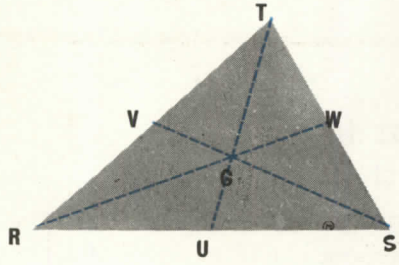


2. ¿Qué sucede a las tres alturas del ejercicio anterior? Al punto en que concurren las tres se llama **ortocentro** del triángulo. Es el punto H.

3. Traza un triángulo obtusángulo MNP (o sea con un ángulo obtuso), y traza sus tres alturas.

Son las rectas PQ, MR y NS. Concurren en el punto H′, que es el ortocentro del triángulo.

154. Medianas de un triángulo. — Dibuja un triángulo RST, y halla, por doblado del papel, el punto medio del lado RS. Traza con la regla la recta TU. Esta recta, que une un vértice con el lado opuesto, se llama **mediana** del triángulo.



Verás que en los libros unas veces se llama mediana a la recta TU y otras al segmento TU. Por el contexto lo distinguirás.

EJEMPLOS. 1. ¿Cuántas medianas puedes trazar en el triángulo RST? Constrúyelas por el método indicado. Son las rectas TU, SV y RW.

2. ¿Qué sucede con las tres medianas anteriores? Concurren en el mismo punto G, llamado **baricentro** del triángulo.

3. Dibuja otro triángulo cualquiera y construye sus tres medianas. Nombra su baricentro.

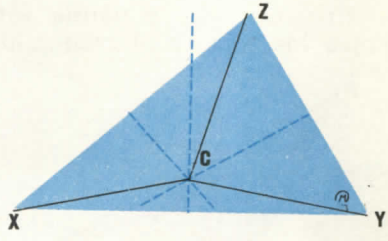
4. En el triángulo RST, ¿cómo es el segmento GV respecto al GS? Hállalo llevando uno sobre otro.

Comprueba igualmente que GW cabe dos veces en GR, o sea que GR es el doble de GW, y que GT es el doble que GU.

155. Mediatrices de un triángulo. — Son las mediatrices de los lados del mismo. Constrúyelas por doblado y comprueba que las tres concurren en el mismo punto C, llamado **circuncentro.**

EJEMPLOS. 1. Une el circuncentro C con los tres vértices X, Y, Z del triángulo. Comprueba que los tres segmentos CX, CY, CZ son iguales.

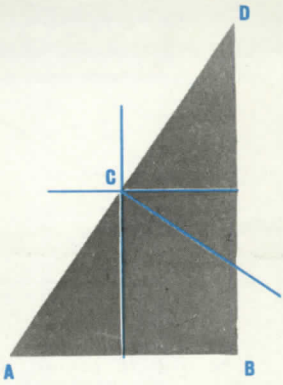
2. ¿Es una casualidad que ocurra CX = CY = CZ, o hay alguna razón profunda para ello?



Efectivamente, por ser C un punto de la mediatriz del segmento XY, equidista (dista igual) de los extremos X e Y del mismo, o sea CX = CY. Pero por pertenecer a la mediatriz de YZ, también equidista de Y y de Z, o sea CY = CZ. Por tanto, ha de ser

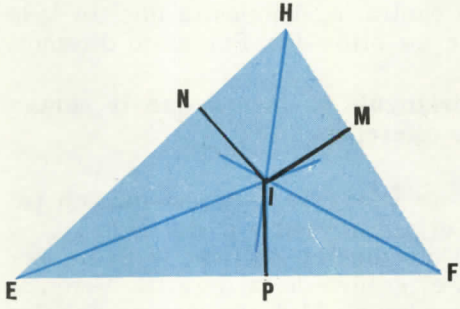
$$CX = CY = CZ$$

3. Traza un t r i á n g u l o rectángulo, construye sus mediatrices y determina su circuncentro C. Comprueba que éste coincide con el punto medio de la hipotenusa.



156. Bisectrices de un triángulo. —Son las de los tres ángulos del triángulo. Construye un triángulo EFH, y dobla de manera que el lado EF caiga sobre EH, y el doblez pase por E. Este doblez es la **bisectriz** del ángulo HEF.

Ejemplos. 1. Traza del mismo modo, por doblado, la bisectriz del ángulo H y del ángulo F, comprobando que las tres bisectrices concurren en un punto I, llamado **incentro** del triángulo.



2. Mediante la escuadra traza desde I perpendiculares a los tres lados, y considera los segmentos IM, IN e IP de dichas perpendiculares, comprendidos entre I y los pies de las perpendiculares. Comprueba que IM = IN = IP.

¿Es una casualidad esta igualdad, o existe alguna razón para que deba verificarse así? Efectivamente, por ser I un punto de la bisectriz del ángulo E, tiene que equidistar de los dos lados, o sea IN = IP. Y por ser un punto de la bisectriz del ángulo H, es IN = IM, lo que demuestra que necesariamente ha de ser

$$IM = IN = IP$$

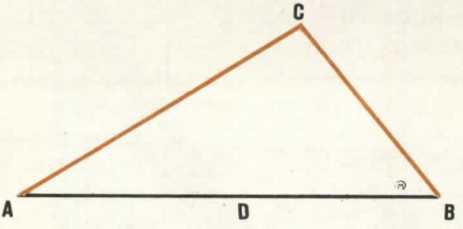
3. Traza un triángulo rectángulo, y determina su incentro. Comprueba que los tres segmentos de perpendicular trazados a los tres lados son iguales.

157. Relaciones entre los lados de un triángulo. — Con regletas o palitos de longitudes variables, forma triángulos.

¿Podrías formar un triángulo con las regletas de 7, 5 y 4? Hazlo. ¿Y con las de 7, 4 y 3? ¿Y con las de 7, 4 y 2?

No se puede en los dos últimos casos.

¿Qué condiciones tiene que cumplir el mayor de los lados para



que se pueda formar triángulo? Ha de ser menor que la suma de los otros dos, o sea en el triángulo ABC:

$$AB < BC + AC \quad (1)$$

EJEMPLOS. 1. Si quisieras ir rápidamente de A a B, ¿qué camino seguirías, el ADB o el ACB?

Ves que *la menor distancia entre los puntos A y B es el segmento rectilíneo que los une.*

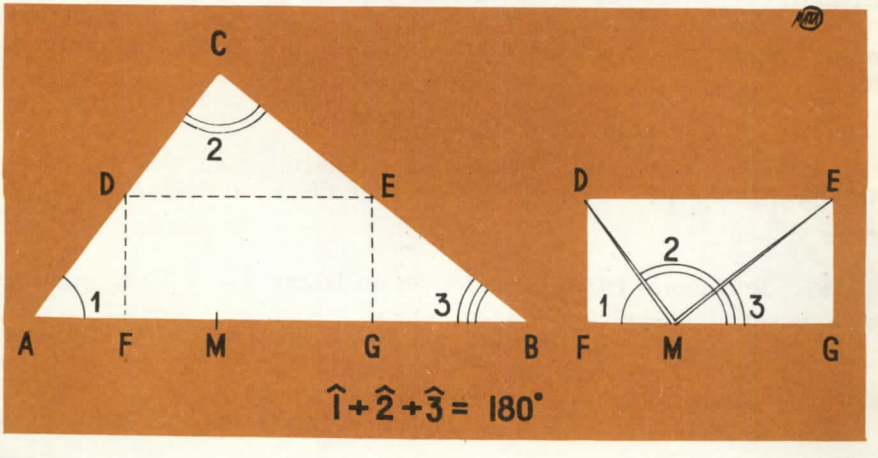
2. En la desigualdad anterior (1) resta AC a los dos miembros; resulta

$$AB - AC < CB$$

desigualdad que leída en sentido contrario, demuestra que un lado CB es mayor que la diferencia de los otros dos. Por tanto diremos:

Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.

158. Suma de los ángulos de un triángulo. —Recortemos en papel el triángulo ABC. Tomemos el punto medio D del lado AC, y el punto medio E del lado BC. Doblemos en seguida la figura por las líneas de puntos, como indica el gráfico de la derecha. Veremos que los tres vértices A, B y C coinciden en M y que los tres ángulos

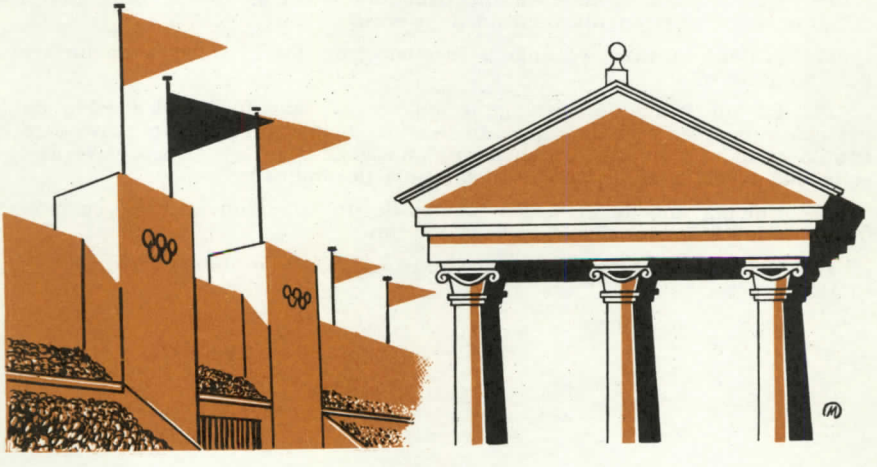


del triángulo forman un ángulo llano, o sea:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$$

La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos, ó 180°.

159. Aplicaciones prácticas. — Es corriente encontrar triángulos en la vida ordinaria. Así, las estructuras de los puentes suelen hacerse a base de triángulos, porque éstos son rígidos; no se deforman. A diferencia de los cuadriláteros, que se deforman fácilmente. La figura presenta otros ejemplos.



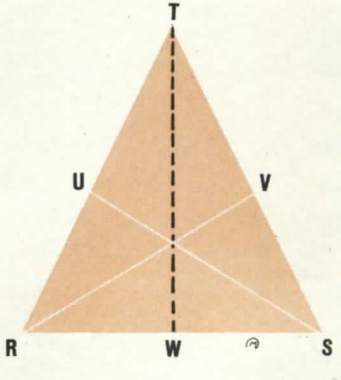
EJERCICIOS

1. Con regla graduada y transportador, construye el triángulo ABC, dados $AB = 7$ cm., $\widehat{ABC} = 70^\circ$ y $BC = 8$ cm. Halla la longitud del lado CA y el número de grados de cada ángulo del triángulo. Haz la suma de los tres ángulos. ¿Cuánto resulta?

2. Demuestra que *las alturas relativas a los vértices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles son iguales.*

¿A qué alturas se refiere este enunciado, a los segmentos o a las rectas?

Para demostrarlo basta que dobles la figura por la altura relativa al lado desigual, TW.



3. Construye el ortocentro de un triángulo rectángulo. Determina también su baricentro.

4. Traza las alturas de un triángulo equilátero y determina el ortocentro del mismo. ¿Podrías decir si este punto es al mismo tiempo baricentro, circuncentro e incentro del triángulo?

5. ¿Cómo son las tres alturas de un triángulo equilátero?

6. ¿Cómo son las distancias del ortocentro de un triángulo equilátero a los tres lados del mismo?

7. ¿Pueden formar triángulo los siguientes lados?: 1.º, ¿de 5, 7 y 13 dm?; 2.º, ¿de 21, 27 y 40 cm?; 3.º, ¿de 153, 84 y 63 metros?

8. El ángulo en el vértice de un triángulo isósceles mide 70º; halla el valor de cada uno de los ángulos básicos.

9. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 33º y 80º. Halla el valor del tercero.

10. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden cada uno 65º. ¿Cuánto mide el triángulo opuesto a la base?

11. ¿Cuánto medirá el ángulo formado por dos bisectrices de un triángulo equilátero?

12. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide doble del otro; ¿cuál es el valor de cada uno de dichos ángulos?; ¿cuánto vale el ángulo recto? ¿Y cuánto suman los dos ángulos? (Haz el gráfico, y verás que el menor de éstos es un tercio de la suma de ambos.)

13. Calcula uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 1225 dm., siendo la base 375 dm.

14. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es 102 m.

29

Paralelogramos

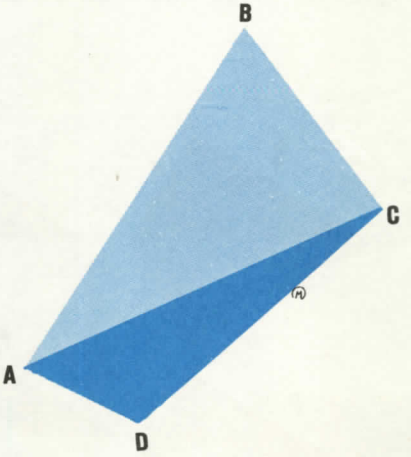
160. Cuadriláteros. — Dibuja dos triángulos que sean consecutivos, como los ABC y ACD de la figura. Recórtala siguiendo su borde ABCD.

Obtienes así una figura geométrica llamada **cuadrilátero,** cuyo borde se compone de cuatro segmentos, AB, BC, CD y DA, llamados **lados** del cuadrilátero. La palabra cuadrilátero significa **cuatro lados.**

El segmento AC se llama **diagonal** del cuadrilátero.

Cada lado se corta con el siguiente en un punto llamado **vértice** del cuadrilátero.

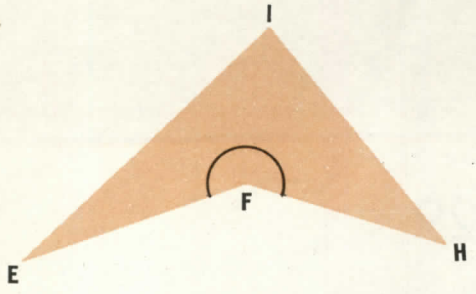
Las semirrectas cuyo origen es un vértice del cuadrilátero, y que contienen a los lados que se unen en él, determinan un ángulo que contiene al cuadrilátero, y que se llama **ángulo** del cuadrilátero.



Ejemplos. 1. ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero? Traza todas las que puedas en la figura anterior y nombra las dos.

2. ¿Cuántos vértices tiene un cuadrilátero? ¿En cuántos ángulos está contenido?

El cuadrilátero tiene cuatro vértices y está contenido en cuatro ángulos.

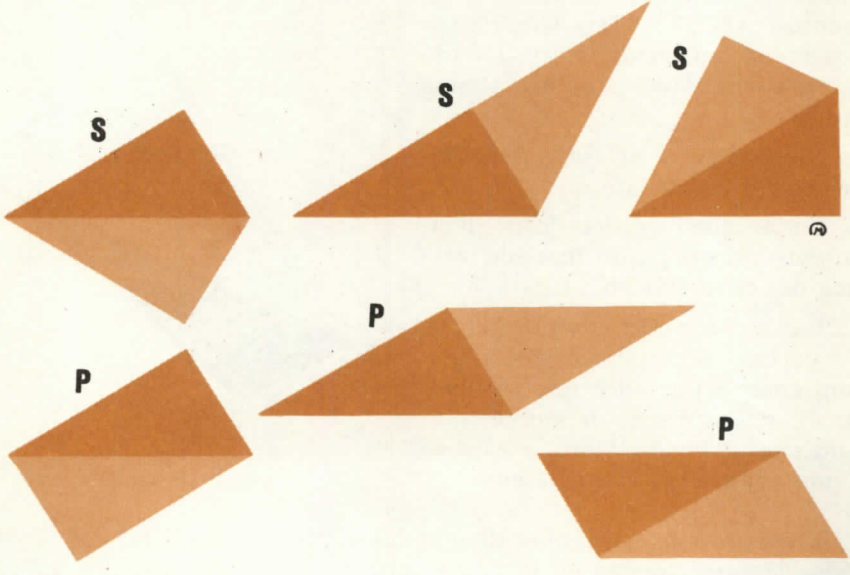


3. Dibuja un cuadrilátero con un ángulo cóncavo como el de la figura. ¿Cuál es el ángulo cóncavo?

Traza sus diagonales y nómbralas

4. Construye y recorta varios cuadriláteros. Clasifícalos colocando en un montón a aquellos cuyos ángulos son todos convexos, y en otro montón a aquellos que tienen algún ángulo cóncavo. A los del primer montón se les llama cuadriláteros **convexos,** y a los del segundo montón, cuadriláteros **cóncavos.**

161. Paralelogramos. — Dibuja un triángulo MNP con los tres lados desiguales. Recorta en seguida varios triángulos iguales a él; han de ser por lo menos 12. Se trata ahora de ver cuántos cuadriláteros distintos puedes obtener colocando cada dos triángulos de éstos de modo que sean consecutivos.



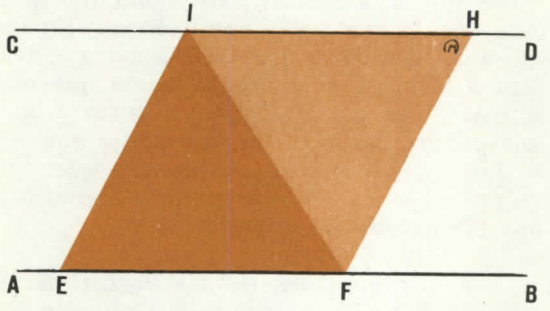
Colocas dos de los triángulos iguales de modo que tengan un lado común y nada más en común, y los pegas con papel celofán. Del mismo modo vas obteniendo otros cuadriláteros distintos, hasta que ya no puedas conseguir ninguno distinto a los anteriores. ¿Cuántos

cuadriláteros has construido de esta forma? Fácilmente estarás conforme en que solamente 6. Los demás que obtengas serán iguales a alguno de éstos. Observarás que de ellos hay algunos que tienen un eje de simetría: los llamaremos cuadriláteros S. Todos los demás tienen sus lados opuestos iguales: les llamaremos cuadriláteros **P** o **paralelogramos.**

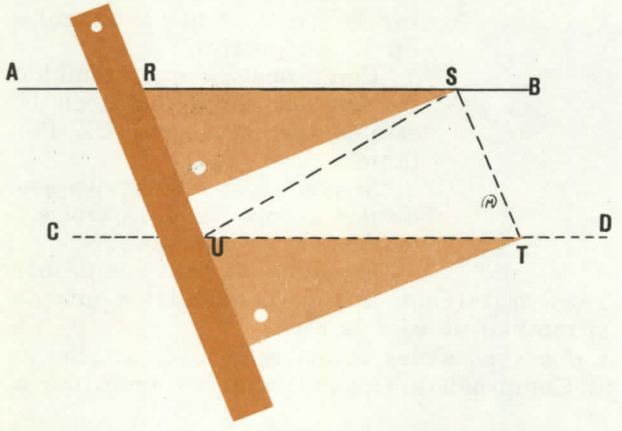
EJEMPLOS. 1. Clasifica los 6 cuadriláteros anteriores, colocando en un montón los cuadriláteros S, y en otro los cuadriláteros P.

2. Construye un paralelogramo distinto de los anteriores. Para ello recorta dos triángulos iguales y colócalos de modo que sean consecutivos y que además los lados opuestos sean iguales. Por definición, el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.

162. Rectas paralelas. —Coloca sobre una cuartilla uno de los paralelogramos que has obtenido anteriormente y prolonga dos lados opuestos del mismo. Verás que no se encuentran por mucho que se prolonguen. Dichas rectas se llaman **paralelas.**

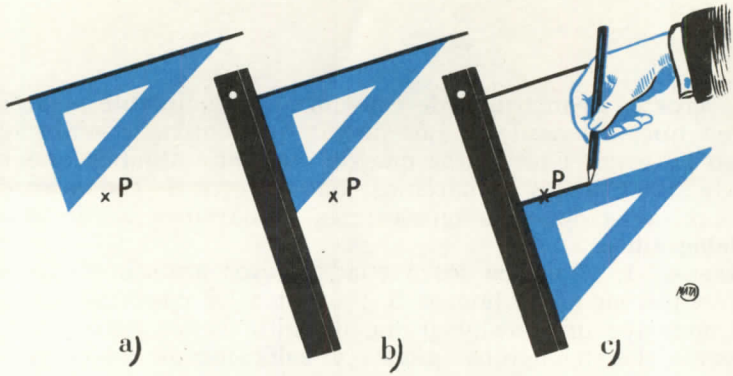


Rectas paralelas son las que contienen lados opuestos de un paralelogramo.



EJEMPLOS. 1. Dada una recta AB, construye una paralela a la misma mediante la escuadra.

Para ello ajusta un lado cualquiera de la escuadra sobre AB. Coloca la regla coincidiendo con otro de los lados de la escuadra. Desliza en seguida ésta apoyándose siempre en la regla. En una posición cualquiera UT traza la recta CD, que será paralela a AB. Para demostrarlo, basta que recortes el cuadrilátero RSTU, lo cortes por la diagonal SU y compruebes que los dos triángulos que resultan son iguales.



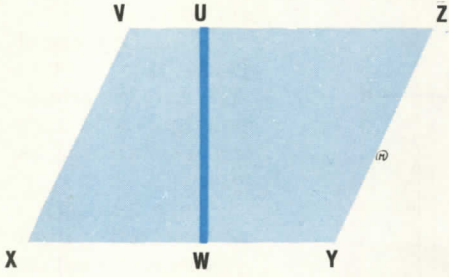
2. Traza por el punto P una paralela a la recta AB.

Se coloca la escuadra de modo que un lado del ángulo recto coincida con la recta AB (posición a). En seguida se aplica una regla sobre el otro lado de la escuadra (posición b). Se desliza después ésta a lo largo de la regla, hasta que el borde que antes coincidía con AB, pase por P. Entonces se traza la recta PC, que será la paralela pedida: *no se cortan por mucho que se prolonguen.*

Del método seguido se deduce que:

Por un punto se puede trazar una paralela a una recta dada, y solamente una **(Postulado de Euclides).**

163. Propiedades de las rectas paralelas. — 1. Traza un paralelogramo XYZV y recórtalo. Dobla en seguida por la recta UW, de modo que WX vaya a caer sobre WY, esto es, que los ángulos en W sean rectos.



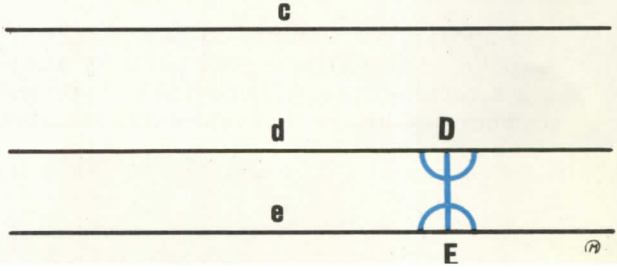
Comprobarás que también los ángulos serán rectos en U, esto es, UV caerá sobre UZ. Por tanto:

Si una recta UW es perpendicular a una de dos paralelas, también lo es a la otra.

En adelante para comprobar si dos rectas son paralelas, trazaremos una perpendicular a una de ellas, y observaremos si también lo es a la otra.

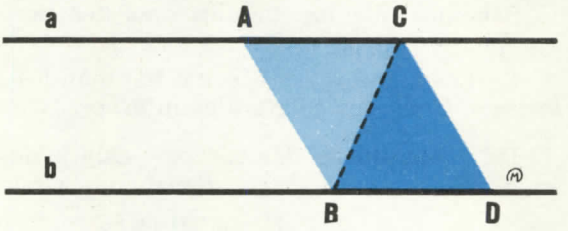
2. Traza dos rectas *d* y *e* paralelas a una recta dada *c*. ¿Serán *d* y *e* paralelas entre sí? Compruébalo trazando una perpendicular a la recta *d*, y viendo si también lo es a la *e*.

Esta es la propiedad **transitiva** del paralelismo.



164. Construcción de paralelogramos. — Para construir paralelogramos no es necesario ya que recortemos triángulos iguales y los peguemos. Estamos en condiciones de idear nuevos métodos más sencillos.

1. Traza mediante la escuadra dos rectas paralelas a y b. Toma en a un punto A, y otro punto B en b. Traza la recta AB. Ésta se llama **secante** respecto a las dos paralelas.



De nuevo mediante la escuadra, traza una paralela CD a la recta AB. Recortando la figura ABCD, y cortando por la diagonal BC, comprueba que se trata de un paralelogramo.

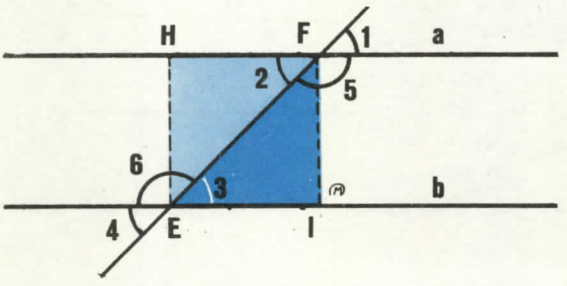
Así tienes un nuevo método para construir paralelogramos.

Todo cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos es un paralelogramo.

2. Traza, mediante la escuadra, dos rectas paralelas a y b. Toma en la recta a un segmento AC, y en la recta b otro segmento BD = = AC. Une A con B y C con D. Comprueba del mismo modo que antes que ABCD es un paralelogramo.

Tienes aquí otro método para construir paralelogramos.

Todo cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos e iguales, es un paralelogramo.



165. Rectas cortadas por una secante. — Traza dos rectas paralelas a y b, y córtalas por una secante EF. Ésta forma con a y b 8 ángulos, de los cuales los ángulos como el $\hat{2}$ y el $\hat{3}$ se llaman **alternos internos,** y los ángulos como el $\hat{1}$ y el $\hat{3}$ se llaman **correspondientes.**

EJEMPLOS. 1. ¿Cómo son los ángulos $\hat{5}$ y $\hat{6}$ en la figura anterior? ¿Y el $\hat{2}$ y el $\hat{4}$?

2. Demuestra que *los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.*

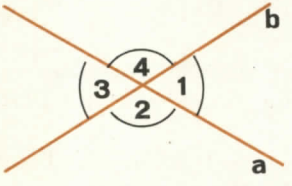
Para ello traza por E una perpendicular EH a la recta *a*, y por F otra perpendicular FI a la recta *b*. Recorta los triángulos HFE y FEI que así se forman, y comprueba que son iguales. Luego $\widehat{2} = \widehat{3}$.

3. Demuestra que *los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.*

Sabemos que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, o sea $\widehat{1} = \widehat{2}$. Luego $\widehat{1} = \widehat{3}$.

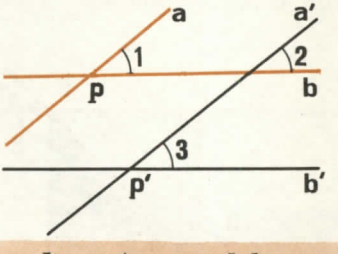
4. Los ángulos 2 y 6, como también los 3 y 5, se llaman *colaterales internos*. Cada dos colaterales internos, ¿cómo son entre sí?

166. Ángulo de dos rectas. — Dibuja dos rectas *a* y *b* que se corten dentro de la cuartilla. ¿Cuántas regiones angulares se forman? Designa con $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$ y $\widehat{4}$ los cuatro ángulos convexos correspondientes. Observa que $\widehat{1} = \widehat{3}$ y $\widehat{2} = \widehat{4}$, por ser opuestos por el vértice, y que $\widehat{1} \leqslant \widehat{2}$, ya que son adyacentes. Pues bien, llamaremos *ángulo de las dos rectas a y b* al $\widehat{1}$ o al $\widehat{3}$, o sea a cualquiera de los dos menores de los cuatro que se han formado.



167. Ángulo formado por dos rectas paralelas a dos rectas dadas. — Dibuja dos rectas *a* y *b*, y por un punto cualquiera P′ del plano traza una paralela *a′* a la recta *a*, y otra paralela *b′* a la recta *b*. ¿Cómo es el ángulo de las rectas *a′* y *b′* respecto al de las rectas *a* y *b*?

Observa que $\widehat{1} = \widehat{2}$, por correspondientes entre paralelas, y $\widehat{2} = \widehat{3}$, por la misma razón. Luego $\widehat{1} = \widehat{3}$.

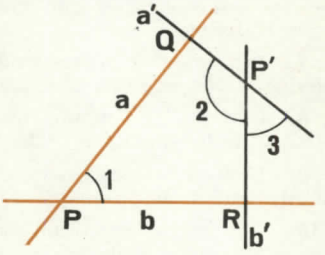


Los ángulos formados por dos pares de rectas paralelas son iguales.

168. Ángulo formado por dos rectas perpendiculares a dos rectas dadas. — Dibuja dos rectas *a* y *b*, y por un punto cualquiera P′ del plano traza una perpendicular *a′* a la recta *a*, y una perpendicular *b′* a la recta *b*. ¿Cómo es el ángulo de las rectas *a′* y *b′* respecto al de las rectas *a* y *b*?

Para demostrar esta relación de un modo general has de comparar primero el ángulo $\widehat{1}$ con el $\widehat{2}$, y a continuación el $\widehat{2}$ con el $\widehat{3}$.

Observando que el cuadrilátero PQP'R se puede descomponer en dos triángulos, mediante la diagonal PP', escribe en tu cuaderno el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero PQP'R. Pero siendo Q = R = 1 recto, ¿qué relación existirá entre $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$? Llama a esta relación (1). Por otra parte, escribe la relación entre $\widehat{2}$ y $\widehat{3}$ y designala (2). ¿Qué deduces de (1) y (2)? Has escrito estas relaciones:



$$\widehat{1} + \widehat{Q} + \widehat{2} + \widehat{R} = 4 \text{ rectos}$$
$$\widehat{1} + \widehat{2} = 2 \text{ rectos} \quad (1)$$
$$\widehat{2} + \widehat{3} = 2 \text{ rectos} \quad (2)$$
$$\widehat{1} = \widehat{3}$$

Ángulos de lados perpendiculares son iguales.

EJERCICIOS

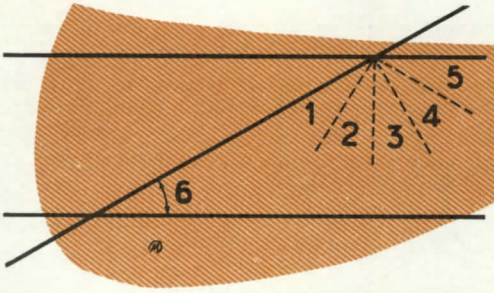
1. Cita ejemplos de rectas perpendiculares y paralelas en la clase, en la calle, en el campo.

2. Traza una paralela a una recta dada a una distancia de 3 cm.

3. Traza en un papel dos ángulos adyacentes. Construye por plegado las bisectrices de los ángulos. ¿Cómo son dichas bisectrices? ¿Sabrías demostrarlo?

4. Halla el valor de los ángulos en que la bisectriz divide a los ángulos que miden: *a*) 108° 24'; *b*) 26° 18'; *c*) 94° 44'; *d*) 218° 56'.

5. Dos ángulos consecutivos miden 84° 28' y 36° 54'. ¿Cuánto medirá el ángulo que forman sus dos bisectrices?



El ángulo pequeño es la sexta parte de la suma 180º

6. Dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman ángulos colaterales internos tales que uno es 5 veces el otro tal como se indica en la figura. Hállalos.

7. Dos ángulos correspondientes entre paralelas suman 253°. Calcula la medida de los ángulos que las paralelas forman con la transversal.

8. Uno de los ángulos que una transversal forma con dos paralelas es recto. ¿Cuánto valen los restantes?

9. Uno de los ángulos que una recta forma con dos paralelas mide 108°. ¿Cuánto miden los demás?

10. Una recta forma con otra un ángulo de 65°. ¿Qué ángulo formará con la segunda una paralela a la primera?

11. Dos segmentos, AB = 40 mm, y CD = 60 mm, se cortan en su punto medio O. ¿Cómo son AC y BD y por qué? Si AC = 25 mm, ¿cuánto medirá BD?

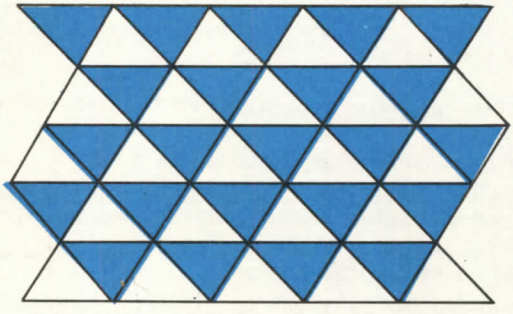
12. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 9 y media?

13. ¿Cómo son dos ángulos consecutivos de un paralelogramo? Demuéstralo.

14. Dos ángulos de lados paralelos suman 68°. ¿Cuánto mide cada uno?

15. Dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares y suman 140°. ¿Cuánto mide cada uno?

16. Toma una hoja de papel blanco y dibuja en ella un pequeño triángulo, evitando que sea isósceles o equilátero. Pinchando los vértices de este triángulo señala cuantos triángulos puedas sobre una cartulina de color, y recórtalos con cuidado. Pégalos ahora sobre tu hoja de papel blanco de modo que formes una *plantilla* análoga a la de la figura.



a) Pon una pequeña estrella en el centro de todos los triángulos que apuntan en el mismo sentido que el de la esquina superior izquierda.

¿Cuántos son los restantes triángulos, y qué puedes decir de ellos?

b) ¿De qué propiedad de la colocación de los triángulos depende la formación de la plantilla?

c) ¿Cuántos conjuntos de rectas paralelas cruzan la plantilla?

17. Las plantillas que llenan un plano u hoja de papel se llaman *mosaicos*. Haz uno.

18. Haz un diseño de cómo se construye un triángulo grande con cierto número de triángulos más pequeños de la misma forma.

19. Tomando como unidad 1 cm, construye un triángulo cuyos vértices sean (7,3), (14,10) y (5,11). Luego construye un mosaico triangular con este triángulo como primer elemento.

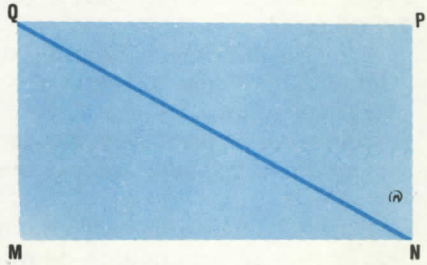
20. Repite el ejercicio anterior, pero tomando los vértices del primer triángulo en A (0,0), B (6,2) y C (3,7).

30

Clasificación de los paralelogramos

169. El rectángulo. —Toma una cuartilla. Una figura geométrica de la forma de una cuartilla se llama **rectángulo.**

Corta el rectángulo MNPQ por la diagonal QN y comprueba que los dos triángulos MQN y NPQ son iguales. Luego el rectángulo es un paralelogramo.



Ejemplos. 1. ¿Cómo son los ángulos de un rectángulo? Construye por doblado un ángulo recto, y colócalo sobre cada uno de ellos. Así compruebas que los cuatro son rectos. Por tanto, cada dos lados opuestos son perpendiculares a los otros dos.

2. Construye un rectángulo por doblado, partiendo de un papel irregular.

3. Construye un rectángulo con la escuadra, trazando perpendiculares en los extremos de un segmento, tomando en ellas longitudes iguales y uniendo los puntos que resultan.

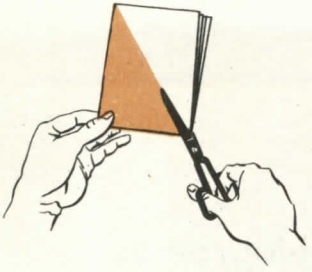
4. En el rectángulo anterior traza las dos diagonales y comprueba que son iguales. ¿Se cortan mutuamente en partes iguales?

En resumen:

Rectángulo es el paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos.

Las dos diagonales de un rectángulo son iguales.

170. El rombo. — Toma una cuartilla. Da en ella un doblez, y de nuevo otro doblez en ángulo recto con el anterior. A continuación corta los cuatro pliegues según una recta oblicua. Al desdoblar



resulta la figura que se indica, denominada **rombo**.

Es un cuadrilátero. ¿Qué son los dos dobleces respecto del mismo? Son las diagonales.

Ejemplos. 1. ¿Podrías demostrar, simplemente por doblado, que el rombo es un paralelogramo?

2. ¿Cómo son los cuatro lados del rombo? Se superponen en el doblado. Han resultado del mismo corte de los cuatro pliegues.

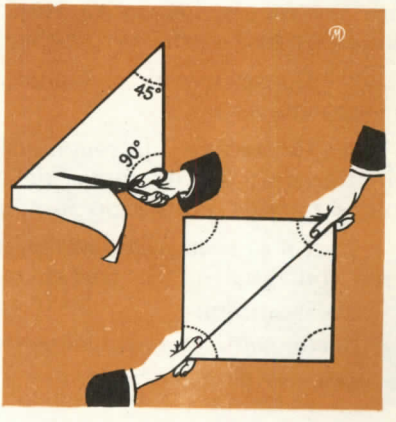
3. ¿Cómo son las diagonales del rombo? Son dobleces en ángulo recto, o sea perpendiculares. ¿Son también bisectrices de los ángulos del rombo?

4. ¿En cuántos triángulos dividen al rombo sus dos diagonales? ¿Cómo son dichos triángulos?

En resumen:

Rombo es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
Sus dos diagonales son perpendiculares.

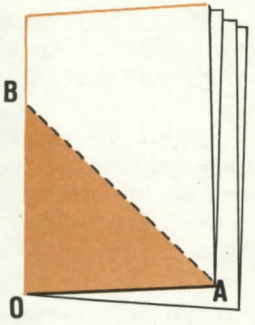
171. El cuadrado. — Toma una cuartilla y dóblala por la bisectriz de uno de sus ángulos, de modo que el lado menor caiga sobre el mayor. Recorta luego el sobrante y desdobla. Has obtenido un rectángulo con sus cuatro lados iguales. Se le llama **cuadrado.**

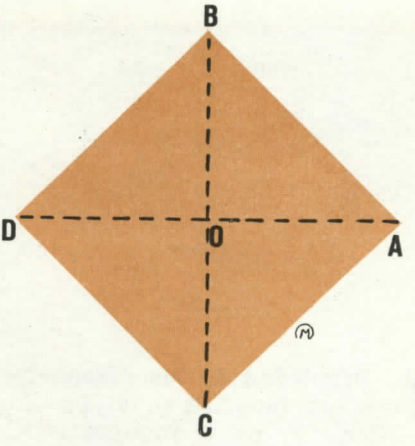


Ejemplos. 1. ¿Cumple el cuadrado la definición de rectángulo, o sea, tiene sus cuatro ángulos rectos? ¿Son sus diagonales iguales? ¿Es, por tanto, un rectángulo?

2. ¿Cumple el cuadrado la definición de rombo, o sea, son sus cuatro lados iguales? ¿Son sus diagonales perpendiculares? ¿Es, por tanto, el cuadrado un rombo?

3. Para confirmarte mejor en lo anterior, realiza la siguiente construcción del cuadrado: da un doblez en un papel y a continuación otro en ángulo recto con el anterior. Toma en los dobleces OA = OB,

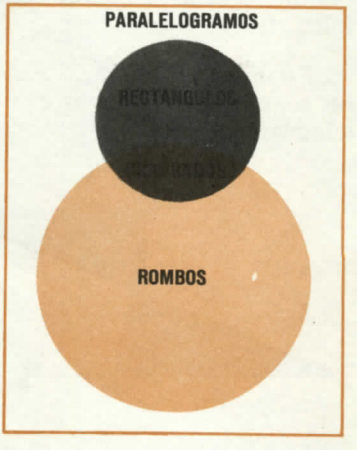




y corta por AB. Al desdoblar obtienes un rombo cuyas diagonales son iguales y sus ángulos rectos, o sea un cuadrado.

El cuadrado es rombo y rectángulo a la vez.

172. Clasificación por inclusión de los paralelogramos. — Utilizando un diagrama de Venn, representamos todos los *paralelogramos* por los puntos de un recinto cerrado.



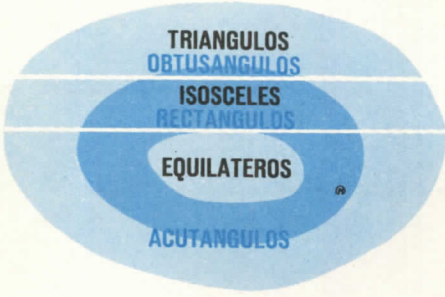
Dentro de éste estarán, como caso particular, los recintos que representan a los *rectángulos* y a los *rombos*. Ambos tendrán necesariamente una parte común, que es la que representa los *cuadrados*, pues éstos son a la vez rombos y rectángulos.

Aquí tienes un ejemplo de *clasificación por inclusión*, de que hablamos anteriormente (número 17).

Ejemplos. 1. Haz una clasificación por inclusión de los triángulos, atendiendo a los lados. Un recinto representa todos los triángulos isósceles, y dentro de éste, otro recinto representa los equiláteros, como caso particular.

2. Haz una clasificación de los triángulos atendiendo a los ángulos.

El recinto que representa a todos los triángulos se divide en tres porciones contiguas sin parte común: una representa los triángulos

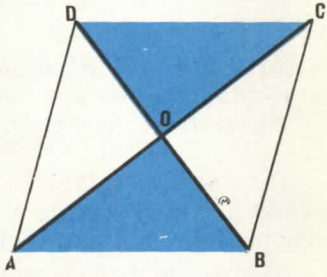


acutángulos, otra los rectángulos y otra los obtusángulos.

3. ¿Puede ser obtusángulo o rectángulo un triángulo equilátero? ¿Y puede serlo uno isósceles?

4. ¿Cómo representarías en el mismo gráfico las dos clasificaciones de los ejercicios 1 y 2 anteriores? La figura adjunta explica el modo de realizarlo.

173. Propiedad de las diagonales de un paralelogramo. — Traza un paralelogramo ABCD, y sus diagonales. Recorta los triángulos ODC y OAB que así resultan y comprueba que son iguales, y que

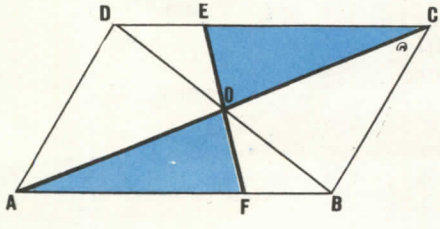


$$OD = OB \quad ; \quad OA = OC$$

Las dos diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en partes iguales.

Por eso al punto O de concurso de las diagonales se llama **centro** del paralelogramo.

EJEMPLO. 1. Traza por el centro O de un paralelogramo ABCD un segmento EF cuyos extremos, E y F, estén en el borde del paralelogramo.



Recorta los triángulos EOC y FOA y comprueba que son iguales, y que

$$OE = OF$$

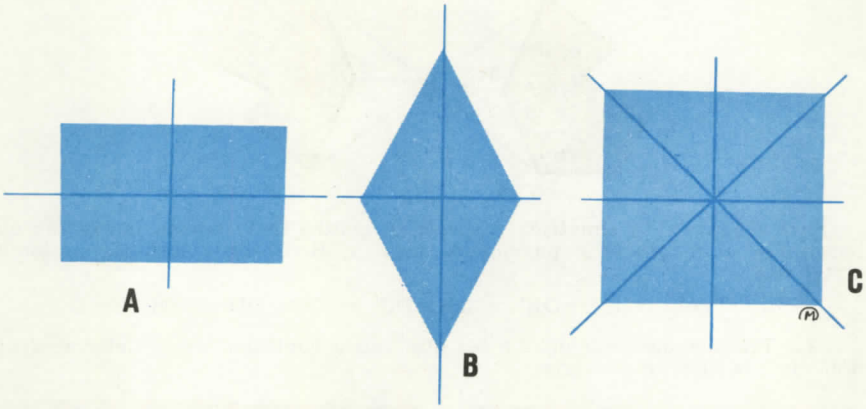
Se dice que *E y F son simétricos respecto de O.*

2. ¿Ocurre lo mismo con cualquier otro segmento que pase por O?

Luego el simétrico respecto de O de cualquier punto del paralelogramo es otro punto del mismo paralelogramo. Se dice que O es *centro de simetría* del paralelogramo.

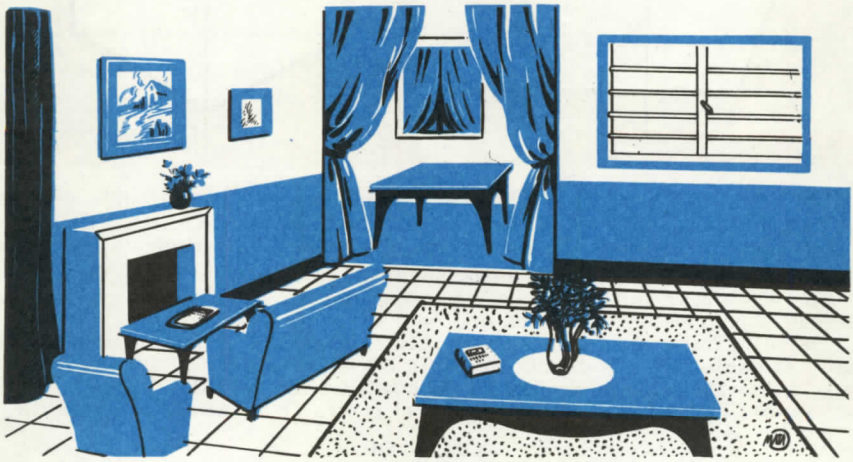
Todo paralelogramo tiene un centro de simetría, que es el punto de intersección de las diagonales.

174. Ejes de simetrías en los paralelogramos. — Toma una cuartilla o rectángulo cualquiera. ¿Podrías hallar algún eje de simetría del mismo? Hazlo por doblado, y comprobarás fácilmente que tiene dos ejes de simetrías, que son los indicados en la figura adjunta.



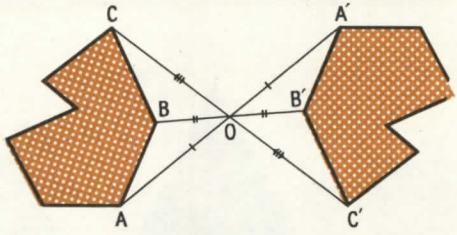
Resuelve los mismos problemas para el rombo y el cuadrado. Observa que el cuadrado tiene las diagonales del rombo y también las del rectángulo: *es rombo y rectángulo a la vez.*

Entre los objetos que vemos y manejamos es muy frecuente la forma de paralelogramo. Los cuadros, puertas y ventanas, losetas, libros, etcétera, son rectángulos.



EJERCICIOS

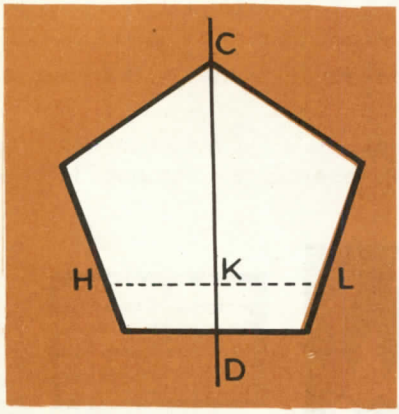
1. Dibuja una figura cualquiera, y halla su simétrica respecto a un punto O, tal como se indica debajo:

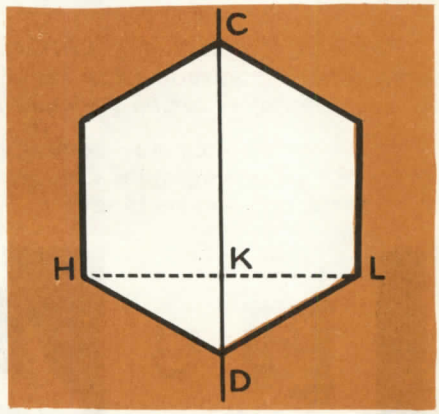


Para construir la simétrica respecto al centro O se trazan las rectas que pasan por el centro O y por los vértices A, B, C, D, y después se toman distancias

$$OA' = OA;\ OB' = OB;\ OC' = OC;\ OD' = OD.$$

2. Traza figuras análogas a las que van a continuación, y determina por doblado sus ejes de simetría:





3. Traza un rectángulo ABCD y sus diagonales; sea O el punto de intersección de las diagonales. ¿Cómo son las longitudes OA, OB, OC, OD?

4. Dibuja un cuadrado ABCD y sus diagonales. ¿Qué decir de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{CAD}$? ¿En la figura hay otros ángulos que tengan la misma medida?

5. Construye un paralelogramo cuyas diagonales miden 4 cm y 6 cm y forman 4 ángulos de los cuales uno vale 60°.

6. *a*) Traza un paralelogramo ABCD y señala el punto medio M de AB y el punto medio P de CD. Compara los segmentos AM y DP.

b) ¿Qué puede decirse de los cuadriláteros AMPD y MBCP?

c) Haz ver que MP pasa por el centro O de ABCD y que se tiene:

$$OM = OP$$

7. Traza un paralelogramo ABCD y la diagonal AC. Haz ver que las distancias de B y de D a la recta AC son iguales.

8. La figura ABCD es un rectángulo. Las diagonales AC y BD se cortan en O. Haz ver que las bisectrices de los ángulos $\widehat{AOD}$ y $\widehat{BOC}$ son paralelas a AB.

9. *a*) Construye un cuadrado conociendo dos vértices consecutivos.
b) Construye un cuadrado conociendo dos vértices no consecutivos.

10. Construye un rombo ABCD conociendo los vértices A y B (AB = 5 cm) y el ángulo $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$.

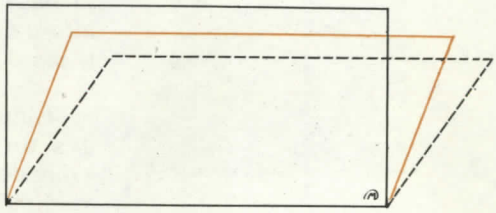
11. En un paralelogramo ABCD, la diagonal AC es bisectriz del ángulo $\widehat{BAD}$. Haz ver que ABCD es un rombo.

12. ¿Qué letras mayúsculas son simétricas: *a*) respecto de dos ejes; *b*) respecto de un eje; *c*) respecto de un punto?

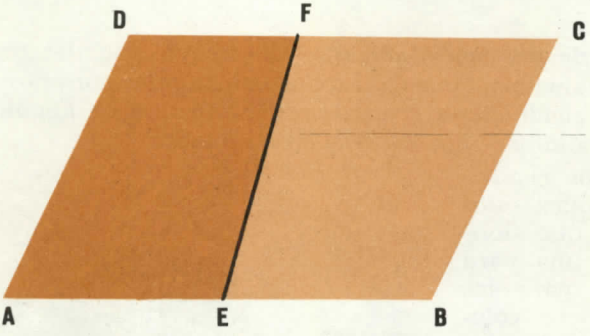
13. Estudia el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un rombo.

14. Estudia el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un cuadrado.

15. Toma dos tiras de cartón de 30 cm y otras dos de 15 cm. Únelas con encuadernadores, de modo que se obtenga el borde de un paralelogramo. Este adopta muy diversas formas. El borde del paralelogramo no es rígido e indeformable como el del triángulo.



16. Construye un paralelogramo ABCD. Señala un punto cualquiera E sobre AB, y otro punto cualquiera F sobre CD. Recorta el paralelogramo, y córtalo por la recta EF. Con los dos trozos reconstruye un paralelogramo diferente del primero.



17. Repite la construcción anterior cortando por una diagonal.

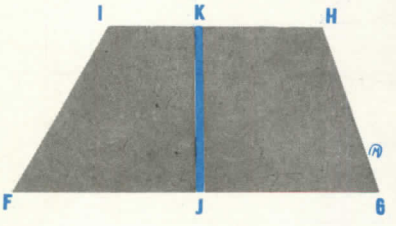
18. Se llama *banda* a la región del plano comprendida entre dos rectas paralelas. ¿Qué es la intersección de dos bandas?

19. Recorta un triángulo. Señala los puntos medios de dos lados, y corta el triángulo por el segmento que une dichos puntos medios. Con los dos trozos obtenidos construye un paralelogramo. ¿Hay varias formas de conseguirlo?

31

Clasificación de los cuadriláteros

175. Trapecios. — Construye un cuadrilátero convexo *con dos lados paralelos*. Se llama *trapecio*. Los dos lados paralelos se llaman *bases*: FG es la base mayor, y HI es la base menor. El segmento JK es la *altura* del trapecio, y es perpendicular a las dos bases.

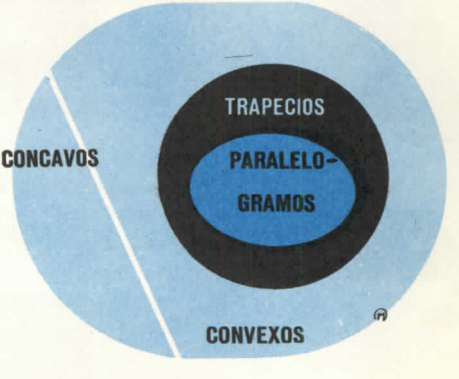


EJEMPLOS. 1. Un paralelogramo, ¿es un trapecio? ¿Cumple la definición de trapecio: tener dos lados paralelos?

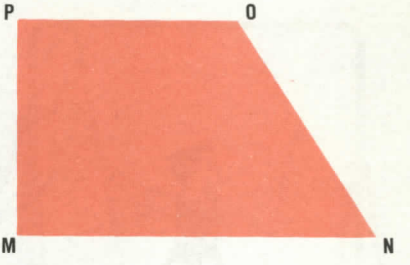
2. Un paralelogramo, ¿puede ser cóncavo?
3. ¿Puede ser cóncavo un trapecio?

176. Clasificación de los cuadriláteros. — Construye cuadriláteros de diversas formas y tamaños. Unos con todos sus ángulos convexos, a los que llamaremos *cuadriláteros convexos*. Otros con algún ángulo cóncavo, a los que denominaremos *cuadriláteros cóncavos*.

Clasifica todos estos cuadriláteros. Representa todos ellos mediante un recinto que dividirás en dos partes: una para los convexos y otra para los cóncavos. En la primera colocarás como caso particular los trapecios, y dentro de ella otra región que represente los paralelogramos.



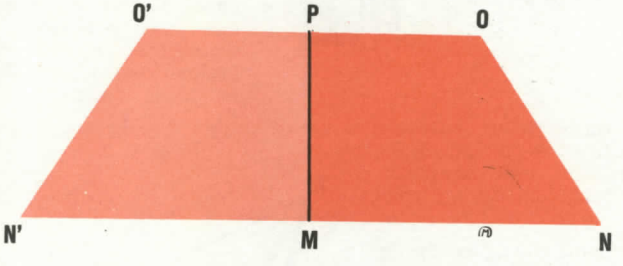
177. Trapecio rectángulo.— Construye un trapecio MNOP con un ángulo recto, al que se le llama *trapecio rectángulo.*



EJEMPLOS. 1. ¿Cuántos ángulos rectos tiene un trapecio rectángulo?

2. Comprueba que uno de sus lados es altura del trapecio.

178. Trapecio isósceles. — Dobla la hoja en que tienes dibujado



el trapecio MNOP por la altura MP y calca el mismo trapecio en MN'O'P. Considera la figura NN'O'O: es un *trapecio con dos lados no paralelos iguales.* Se llama *trapecio isósceles.*

EJEMPLOS. 1. El trapecio rectángulo ¿tiene algún eje de simetría? ¿Y el trapecio isósceles? ¿Cuál es dicho eje de simetría? En la figura es la recta MP.

2. ¿Cómo son los ángulos contiguos a la misma base, como el N y el N', en el trapecio isósceles? Son iguales, ya que se superponen en el doblado.

3. ¿Cómo son los ángulos contiguos a un lado oblicuo, como el N y el O, en el trapecio isósceles? Son suplementarios, por ser colaterales internos entre paralelas.

4. ¿Qué particularidad presentan las dos diagonales de un trapecio isósceles? Compruébalo por doblado.

EJERCICIOS

1. Da algunos ejemplos de trapecios en la vida diaria, en el circo, etc.

2. ¿Sabrías colocar dos trapecios iguales consecutivos de modo que formen un paralelogramo? ¿Cuántas soluciones hay?

3. ¿Puedes construir un cuadrilátero determinado sólo conociendo las longitudes de los cuatro lados?

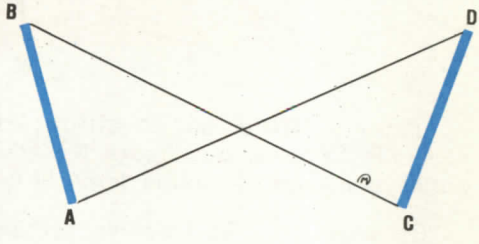
4. ¿Cuántos cuadriláteros puedes construir que tengan lados de 7, 9, 11 y 13 cm, en este mismo orden?

5. Construye cuadriláteros articulados, ya mediante tiras de cartón unidas con encuadernadores, ya mediante barras de meccano. Mueve los lados, y observa que puedes obtener tantos cuadriláteros distintos como quieras, incluso *cuadriláteros cruzados*, como el de la figura.

6. Las bases de un trapecio isósceles miden 6 y 16 cm respectivamente, y el lado oblicuo 8 cm. ¿Cuál es el perímetro de este trapecio, esto es, la longitud de su contorno?

7. Dos lados contiguos de un paralelogramo miden 15 y 21 cm respectivamente. ¿Cuánto mide su perímetro?

8. Dibuja un trapecio rectángulo que tenga 5 cm. de altura, un ángulo de 60° y la base mayor de 12 cm.



9. Construye un trapecio isósceles cuyas bases miden 7 y 10 cm y su altura 5 cm. Mide sus ángulos.

10. Construye un trapecio isósceles, y une el punto medio de la base mayor con los extremos de la base menor. ¿Cuántos triángulos se obtienen así? ¿Algunos de ellos son iguales?

¿Cómo debería ser el trapecio para que al descomponerlo en la forma dicha, los tres triángulos que se obtienen fuesen iguales y equiláteros? En este caso, ¿cuál sería el perímetro del trapecio, cuando el lado oblicuo mide 4 centímetros?

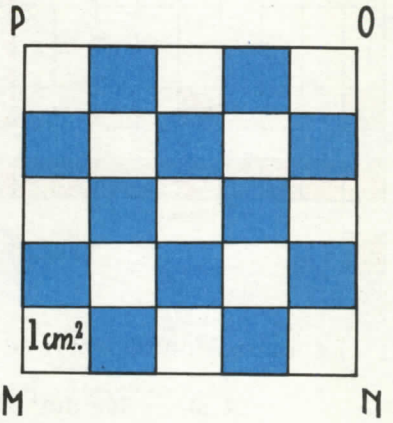
32

Unidades de área (superficie)

179. Área de una figura. — Sabemos que *longitud de una línea es la medida de su extensión.*

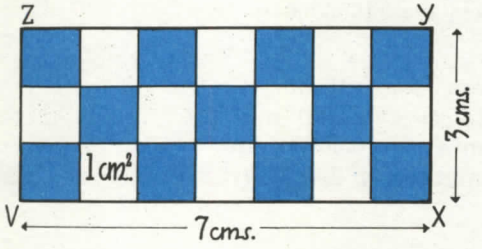
Del mismo modo toda figura de dos dimensiones tiene una cierta extensión. *La medida de la extensión de una figura de dos dimensiones se llama* **área** *de dicha figura.*

Como *unidad de área* tomemos de momento el *área de un cuadrado de 1 cm de lado*, al que denominaremos *centímetro cuadrado* (cm^2).



180. Área del cuadrado. — Sea el cuadrado MNOP de 5 cm de lado. Dividimos el lado MN en cinco partes iguales, de 1 cm cada parte, y por los puntos de división trazamos paralelas a MP. Del mismo modo, dividimos MP en cinco partes y trazamos paralelas a MN por cada uno de los puntos de división. Queda así dividido el cuadrado en cinco filas de cinco cuadraditos (de 1 cm de lado) cada una, o sea en $5 \times 5\ cm^2 = 25\ cm^2$. Es decir, que multiplicamos el lado por sí mismo.

Área del cuadrado = lado × lado

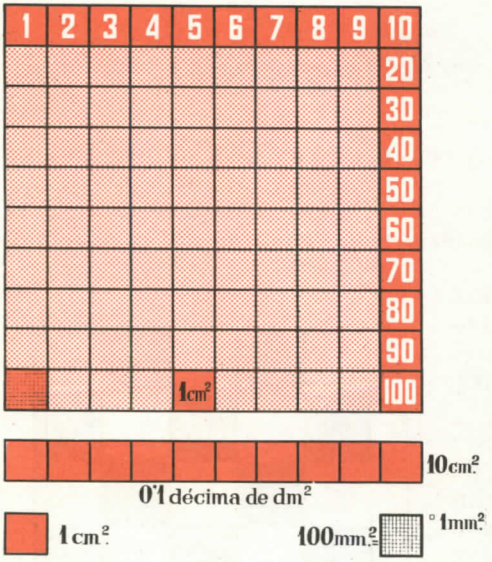


181. Área del rectángulo. — ¿Cuántos centímetros tiene cada fila del rectángulo VXYZ?

¿Cuántas filas hay? ¿Cuál es el área?

Área = 3 × 7 cm² = 21 cm²

Área del rectángulo = longitud × anchura



182. El decímetro cuadrado (dm²). — La figura representa un cuadrado de 1 dm de lado. Su área es la unidad de áreas llamada *decímetro cuadrado*. Se escribe dm².

Se puede dividir en diez franjas de 10 cm² cada una, o sea en 10 × 10 cm² = 100 cm².

1 dm² = 100 cm²

Del mismo modo, el centímetro cuadrado se puede dividir en 100 cuadraditos de 1 mm de lado, o sea, en 100 milímetros cuadrados (mm²).

1 cm² = 100 mm²

La unidad fundamental de área es el *metro cuadrado* (m²).

1 m² = 100 dm² = 10000 cm² = 1000000 mm²

183. Metro cuadrado (m²).— El metro cuadrado es el área de un cuadrado que tiene un metro de lado.

Los múltiplos son:

El decámetro cuadrado (dam²) = 100 m².
El hectómetro cuadrado (hm²) = 10000 m².
El kilómetro cuadrado (km²) = 1000000 m².

Los submúltiplos son:

El decímetro cuadrado (dm²) = 0'01 m².
El centímetro cuadrado (cm²) = 0'0001 m².
El milímetro cuadrado (mm²) = 0'000001 m².

Las unidades de área aumentan y disminuyen de 100 en 100.

184. Medición de áreas. — Para medir el área de una figura, basta ver cuántas veces contiene ésta al metro cuadrado o a uno de sus múltiplos o submúltiplos. No existen *medidas efectivas* de área. Esto se debe a que la Geometría da reglas para hallar el área de una figura midiendo ciertas longitudes en la misma.

Así, el área de un campo rectangular se halla *multiplicando lo largo por lo ancho.*

PROBLEMA. — *Dos muchachos miden con una cadena de agrimensor la largura de un campo, y hallan 6 dam, 4 m, y su anchura, que es 5 dam, 7 m. ¿Cuál es el área del campo?*

El área es: $84 \text{ m} \times 57 \text{ m} = 4788 \text{ m}^2 = 47 \text{ dam}^2\ 88 \text{ m}^2$

Se necesita un grupo de dos cifras para representar cada unidad.

185. Conversión de complejos en incomplejos. — Supongamos que al medir la superficie de un terreno se ha obtenido 5 hm^2, 15 dam^2, 52 m^2 y 7 dm^2. Ahora bien, como 5 hm^2 = 5000000 dm^2, 15 dam^2 = 150000 dm^2 y 52 m^2 = 5200 dm^2, el área del campo será:

$$5000000 + 150000 + 5200 + 7 = 5155207 \text{ dm}^2$$

De donde se deduce la siguiente REGLA:

Para convertir un complejo de superficie en el incomplejo del orden inferior, se escriben las cifras de los órdenes sucesivos, reservando dos lugares para cada orden y colocando ceros en los huecos que resulten.

Así, 5 hm^2, 83 m^2, 7 dm^2, puede escribirse 5008307 dm^2, como se ve en el cuadro que va a continuación.

Recíprocamente:

Para convertir incomplejos de superficie en complejos, se separan las cifras de dos en dos, a partir de la coma, a uno y otro lado de ella, poniéndoles las denominaciones correspondientes a sus órdenes.

Por ejemplo, si el área de un campo es 7026'318 m^2, o completando los órdenes 7026'3180 m^2, este número puede escribirse:

70 dam^2, 26 m^2, 31 dm^2, 80 cm^2

como se ve en el siguiente

CUADRO RESUMEN

km^2	hm^2 ha.	dam^2 a.	m^2 ca.	dm^2	cm^2	mm^2
	5	00	83	07		
		70	26	31	80	

NOTA. — No confundas el dm^2 con la décima de m^2; el cm^2 con la centésima de m^2...; el dam^2 con el décuplo de m^2...

186. Cambio de unidad. — Para cambiar de unidad se han de distinguir dos casos, según se desee pasar de unidades de orden superior a inferior, o viceversa. Sea, por ejemplo, el número:

7852'43 m^2

Para expresarlo en dm^2, en cm^2 o en mm^2, basta multiplicarlo por 100, 10000, 1000000, pues el m^2 tiene 100 dm^2, 10000 cm^2 y 1000000 mm^2. Por tanto,

7852'43 m^2 = 785243 dm^2 = 78524300 cm^2

Para pasar de una unidad de superficie a otra de orden inferior, se multiplica el número dado por la unidad seguida de un número de ceros doble que el de los lugares que hay desde la unidad que se da hasta la que se quiere transformar.

Al contrario, para transformar el número dado en unidades de orden superior, habrá que dividir por 100, 10000, etcétera. Así:

$$7852'43\ m^2 = 78'5243\ dam^2 = 0'785243\ hm^2$$

Para pasar de una unidad de superficie a otra de orden superior, se divide el número dado por la unidad seguida de un número de ceros doble que el de los lugares que hay desde la unidad que se da hasta la que se quiere transformar.

187. Unidades agrarias. — Para hallar la extensión de campos, bosques, praderas..., se toma por unidad el área (a).

El área vale un decámetro cuadrado.

Las unidades secundarias son:

La hectárea (ha), que vale 100 áreas ó 1 hm^2.

La centiárea (ca), que vale 0'01 a ó 1 m^2.

El cálculo con las unidades agrarias es el mismo que con las de superficie.

EJEMPLOS:

1.º 3 ha, 7 a, 5 ca, se escribe 3 ha, 07 a, 05 ca = 307'05 a.

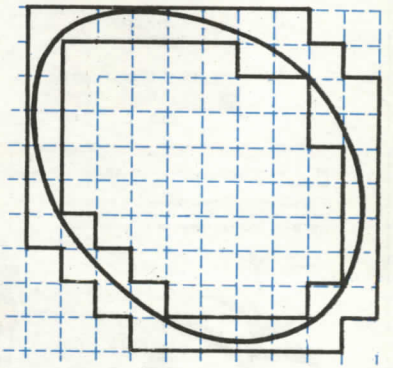
2.º 372'87 a = 372'87 dam^2 = 37287 m^2.

3.º Traza una cuadrícula, y en su interior una curva cerrada. ¿Cuántos cuadraditos de la cuadrícula contiene aproximadamente el recinto encerrado por la curva?

Evidentemente, dicho número es inferior al de cuadraditos que contiene la quebrada de trazo lleno exterior a la curva, y es superior al número de cuadraditos que contiene la quebrada de trazo lleno interior a la curva.

De un modo aproximado el número pedido se obtiene añadiendo al número de cuadraditos de la quebrada interior la mitad de los comprendidos entre las dos quebradas.

En el ejemplo dado son 52 cuadraditos + (38 cuadraditos : 2) = 52 cuadraditos + 19 cuadraditos = *71 cuadraditos.*



EJERCICIOS

Convierte en incomplejos del orden inferior:

1. 6 km², 36 hm², 8 dam².
2. 12 dam², 8 m², 36 dm².
3. 16 hm², 5 m², 6 dm².
4. 15 m², 8 cm².

Expresa como complejos los siguientes:

5. 383'5215 dam².
6. 5275'318 m².
7. 21'71215 hm².
8. 171'2163 dm².
9. Expresa en m²:

a) 71 ha, 25 a, 8 ca; *b*) 705'36 a.; *c*) 7'21 ha.

Expresa en metros cuadrados:

10. 482'1 dm².
11. 6020 dm².
12. 0'0046 km².
13. 8701 cm².
14. 14'68 hm².
15. 4 dam², 5 m², 3 dm².

Expresa en hectáreas:

16. 50026 m².
17. 8 ha., 14 a.
18. 14 ha, 8 a.
19. 6 ha, 6 a, 6 m².
20. 7 a, 7 ca.
21. 4'6287 km².

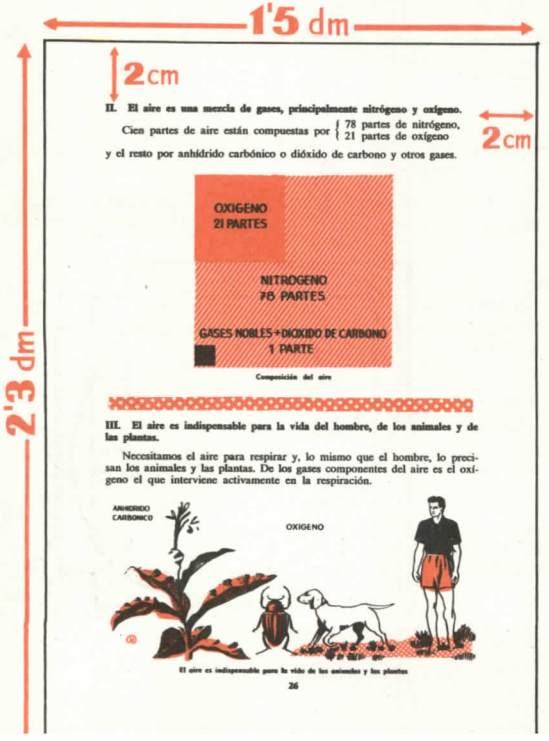
Expresa en decímetros cuadrados:

22. 20'375 ca.
23. 21'2756 a.
24. 0'5367 ha.

25. ¿Cuál es la extensión, en ha, de un campo que mide 148 m de largo por 123'6 m de ancho?

26. Si el m² de terreno vale 450 ptas., ¿cuánto vale un campo de 6 ha?

27. Una provincia tiene 15850 km² de área. Exprésala en ha.



28. ¿Cuánto vale una finca rectangular de 268 metros de larga por 175 m de ancha, a razón de 22500 pesetas el dam²?

29. Un jardín mide 37 dam², 83 m². ¿Cuál es su longitud, si tiene 42 m de ancho?

Observa que:

$$\text{ancho} = \frac{\text{área}}{\text{largo}}; \qquad \text{largo} = \frac{\text{área}}{\text{ancho}}$$

¿Por qué?

30. La hoja de un libro mide 2'3 dm de largo por 1'5 dm de ancho. Se deja un margen de 2 cm en los cuatro lados. ¿Cuál es el área de la superficie impresa?

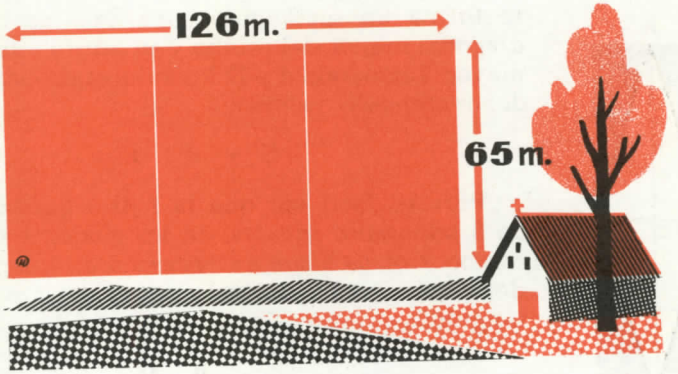
31. Halla la anchura de un campo rectangular de 1 ha 26 a, sabiendo que su longitud es 200 m.

32. Halla el área de una alfombra colocada en el centro de una habitación de 6 m de larga y 4'5 m de ancha, si todo alrededor de la alfombra queda un espacio de 4 dm de anchura.

33. Se quiere pintar las 4 paredes y el techo de una habitación de 7 m de larga, 5'4 m de ancha y 4 m de alta. ¿Cuánto cuesta, a razón de 36 pesetas el m^2?

34. Los pasillos de un colegio tienen una anchura de 3 m y una largura total de 680 m. Se quiere embaldosarlos con baldosines cuadrados de 2'5 dm de lado. ¿Cuánto habrá que pagar, si cada baldosín cuesta 12 pesetas?

35. Un campo rectangular de 126 m de largo y 65 m de ancho se ha dividido en tres parcelas iguales en el sentido de la menor longitud. ¿Cuál es el área de cada una de ellas?



36. Dando pasos de 7'5 dm de longitud, un hombre ha recorrido la mayor dimensión de un campo en 96 pasos, y la menor dimensión en 78 pasos. ¿Cuánto cuesta este terreno, a razón de 360 pesetas el m^2?

37. Un trozo de tela de 125 dm de largo por 14 dm de ancho ha costado 3850 pesetas. ¿A cómo ha costado el m^2?

38. ¿Cuánto cuesta pintar los 86'5 m^2 de una pared, sabiendo que el dm^2 cuesta 0'60 pesetas?

39. Dos terrenos miden en conjunto 3'50 ha. Sabiendo que los dos son iguales, halla el valor de cada uno a razón de 420 pesetas el metro cuadrado.

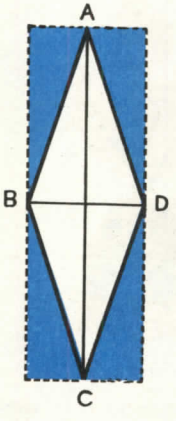
40. Un campo de 67'5 a se ha dividido en tres partes iguales. ¿Cuál es en metros cuadrados la extensión de cada una de estas partes?

41. Se han vendido tres campos a 2'50 pesetas el m^2 por 12102 pesetas. Sabiendo que el primero mide 8'068 dam^2 y el segundo 2134 m^2, ¿cuál es el área del tercero?

33

Áreas de figuras planas

188. Área del rombo. — En la figura, trazando por los cuatro vértices, A, B, C y D del rombo, paralelas a las diagonales del mismo, se forma un rectángulo cuya base es igual a la diagonal menor del rombo y su altura a la diagonal mayor. Llamando d y D los valores de éstas, el área del rectángulo valdrá:



$$S' = d \cdot D$$

Pero es fácil ver que la figura queda dividida en 8 triángulos iguales, de los cuales 4 forman el rombo y otros 4 son exteriores a él. Luego el área del rombo será igual a la mitad del área del rectángulo:

$$S = \frac{d \cdot D}{2}$$

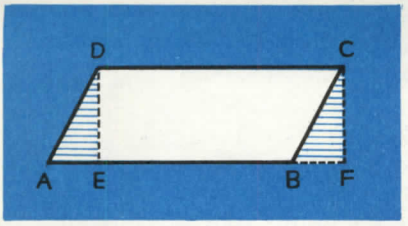
El área del rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.

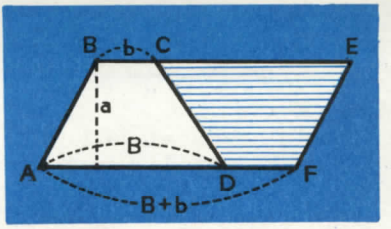
189. Área de un paralelogramo cualquiera. —Sea el paralelogramo ABCD. Tracemos las perpendiculares a la base por C y D. Se obtienen dos triángulos iguales: $\triangle$ ADE = $\triangle$ BCF.

Luego el paralelogramo dado es equivalente al rectángulo DE FC; además, ambos tienen la misma base y la misma altura. Luego:

El área de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de los números que miden su base y su altura.

$$S = b \cdot a$$





190. Área del trapecio. — Si a continuación del trapecio ABCD colocamos el mismo invertido,[1] obtendremos un paralelogramo ABEF cuya área es

$$S' = (B + b)\ a$$

Luego el área del trapecio valdrá

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

El área del trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.

EJEMPLOS. 1. *En un rectángulo de 88 dm de perímetro, la altura es la tercera parte de la base. Halla su área.*

Si la altura fuera 1, el perímetro sería 1 + 3 + 3 + 1 = 8. Lo que indica que la altura es la octava parte del perímetro, o sea 88 dm : 8 = 11 dm. La base medirá: 11 dm . 3 = 33 dm. Luego el área es

$$33 \text{ dm} \cdot 11 \text{ dm} = \mathbf{363\ dm^2}$$

2. *En un trapecio las bases miden 31 cm y 50 cm, respectivamente, y el área 26'73 dm². Halla la altura.*

Tendremos: B + b = 81 cm.

$$\frac{81 \text{ cm} \cdot a}{2} = 2673 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{2673 \text{ cm}^2 \cdot 2}{81 \text{ cm}} = \frac{5346 \text{ cm}^2}{81 \text{ cm}} = \mathbf{66\ cm.}$$

Cuida de expresar todas las medidas en unidades equivalentes.

[1] Para ello basta girar el trapecio ABCD 180° alrededor del punto medio del lado CD.

3. *Halla la altura de un paralelogramo cuya base mide 37 cm y su área 740 cm².*

Sustituyendo en la fórmula: $740 \text{ cm}^2 = 37 \text{ cm} \cdot a$.

Y despejando la altura: $a = 740 \text{ cm}^2 : 37 \text{ cm} = \mathbf{20 \text{ cm}}$.

191. Área del triángulo. — Sea el triángulo ABC. Si llevamos a continuación el mismo invertido,[1] obtenemos un paralelogramo de misma base y altura que el triángulo.

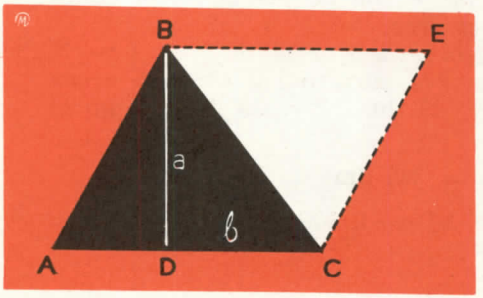
Llamando a éstas b y a, el área del paralelogramo será:

$$S' = b \cdot a$$

y la del triángulo:

$$S' = \frac{b \cdot a}{2} \qquad (1)$$

El área del triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de la base y de la altura.



EJEMPLO. *Un triángulo tiene 128 cm² de área y 16 cm de altura. ¿Cuál es su base?*

Solución: Aplicando la fórmula (1), se tiene:

$$128 \text{ cm}^2 = \frac{b \cdot 16 \text{ cm}}{2} = b \cdot 8 \text{ cm}.$$

Despejando la base:

$$b = \frac{128 \text{ cm}^2}{8 \text{ cm}} = \mathbf{16 \text{ cm}}.$$

EJERCICIOS

1. Expresa en ha, a y ca el área de un campo rectangular de 573 m de largo y 236 m de ancho.

2. Ídem en metros y decímetros cuadrados el de un rombo cuyas diagonales miden 12'6 m y 18'2 m, respectivamente.

3. Ídem en dam^2 el de un campo de forma de trapecio, cuyas bases miden 36 m y 48 m, y su altura 25 m.

---

[1] Para ello basta girar el triángulo ABC, alrededor del punto medio del lado BC, un ángulo de 180°.

4. La base y la altura de un rectángulo se diferencian en 18 cm, y el perímetro mide 132 cm. Halla su área.

5. El área de un campo de forma de paralelogramo es de 37 ha, 6 a, 56 ca, y su altura mide 864 m. Hallar la base.

6. El perímetro de un rectángulo es 180 dm, y la base es dos veces la altura. Halla el área.

7. ¿Cuántas baldosas de forma cuadrada son necesarias para embaldosar una sala de 16 m de largo por 12 de ancho, si las baldosas tienen 0'40 m de lado?

8. Halla la altura de un paralelogramo cuya base mide 25 dm, si su área es de 4 m^2.

9. ¿Cuál debe ser la longitud de una clase que tiene 3'30 m de anchura para que pueda contener 44 alumnos, a razón de 0'75 m^2 por alumno?

10. Un jardín rectangular de 74 m de largo y 53 de ancho está atravesado por dos paseos perpendiculares de 1'80 m de anchura. ¿Cuál es la parte cultivada?

11. Un ramal de ferrocarril ha de tener 40 km de largo por 12 m de ancho. ¿Cuánto costará el terreno, si se paga a 4500 pesetas la ha?

12. Se quiere esterar una sala de 21 m de largo por 12 m de ancho con estera de 0'80 m de ancho. ¿Qué longitud de estera se necesita?

13. El área de un trapecio es 120 m^2 y la altura 8 m. Una de las bases mide 10 m; calcula la otra.

14. Un trapecio cuyas bases miden 124 cm y 86 cm, es equivalente (igual área) a un rectángulo cuyas dimensiones son 168 cm y 125 cm. ¿Cuál es la altura del trapecio?

15. Las diagonales de un rombo miden 64 cm y 48 cm. Siendo el lado del mismo de 40 cm, halla su altura.

16. El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m; las bases, 40 m y 30 m, respectivamente. Calcula los lados no paralelos.

17. Halla el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un rombo de 3'15 dm de lado.

18. Halla el lado de un rombo cuyo perímetro es igual al de un triángulo equilátero, de lado 0'76 m.

19. ¿En cuánto hemos de alargar los 145 cm de la base de un rectángulo de 75 cm de altura para que, conservando ésta, se convierta en otro rectángulo equivalente a un cuadrado de 135 cm de lado?

20. ¿Cuál es el área de un triángulo cuya base tiene 54'65 m y la altura 19'26 m?

21. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5'7 m y 8'3 m. Halla su área.

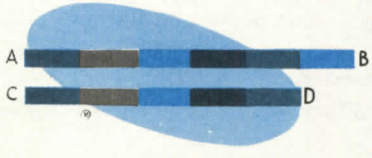
22. ¿Cuál es la altura de un triángulo de 2'25 m^2 de área y 1'80 m de base?

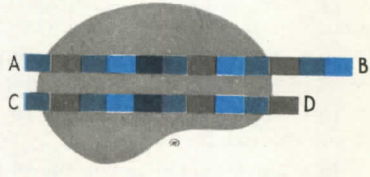
34

Fracciones

192. Definición. — Supongamos que queremos medir el segmento AB tomando como unidad el segmento CD.

Vemos que la unidad no cabe un número entero de veces en AB. Cabe una vez, y sobra un trozo pequeño. Pero observamos que dividiendo la unidad en 5 partes iguales, cada una de ellas cabe exactamente en AB 6 veces.





Decimos que la medida de AB, con dicha unidad, es el *número fraccionario* o *fracción* $\frac{6}{5}$, o también (6, 5).

El *numerador* 6 designa el número de partes que contiene la cantidad medida; el denominador 5 representa el número de partes en que se divide la unidad. Ambos son los *términos* de la fracción.

Fracción es un par ordenado de números naturales, llamados numerador y denominador.

193. Equivalencia de fracciones. — Supongamos que la unidad CD se divide en 10 partes iguales. Veremos que cada una de éstas cabe exactamente 12 veces en AB. Luego la medida de AB es $\frac{12}{10}$.

Pero como dicha medida ha de ser la misma que antes, resulta que

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$$

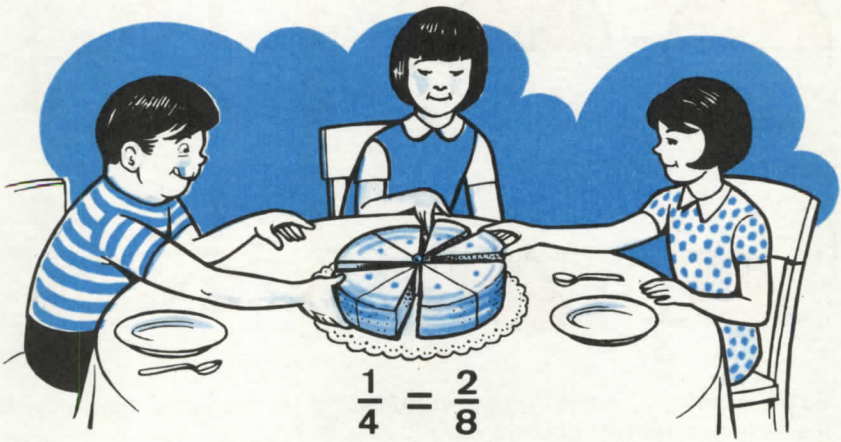
Estas dos fracciones se llaman *equivalentes*.

194. Propiedad fundamental de las fracciones.

Si a los dos términos de una fracción se les multiplica o divide por el mismo número, la fracción obtenida es equivalente.

En efecto, si Luis ha recibido $\frac{1}{4}$ de una tarta y Margarita $\frac{2}{8}$ de la misma tarta, los dos han recibido la misma cantidad de tarta. O sea

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{2}{8}$$



195. Simplificación de fracciones. — La igualdad anterior, leída de derecha a izquierda, demuestra que siempre que los dos términos de un quebrado tengan algún factor común, se pueden dividir ambos por dicho factor, con lo cual se obtiene un quebrado equivalente (del mismo valor), pero cuyos términos son más sencillos.

Sea la fracción $\frac{60}{75}$. Según el número anterior,

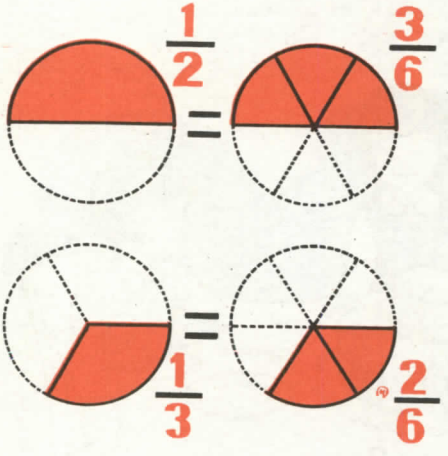
$$\frac{60}{75} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},$$

dividiendo sucesivamente por 5 y por 3.

Luego *simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente y de términos más sencillos. Para ello, se dividen sus dos términos por un mismo divisor de ambos.*

196. Reducción de fracciones a común denominador. — *Reducir varias fracciones a común denominador es transformarlas en otras equivalentes que tengan el mismo denominador.*

Luisa ha recibido $\frac{1}{2}$ del pastel y Margarita solamente $\frac{1}{3}$. ¿Cómo reducir estas dos fracciones a común denominador?



$$\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$$

Basta dividir el pastel en un número de partes igual al producto de los denominadores, en este caso $2 \times 3 = 6$.

Para reducir varias fracciones a común denominador se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de las demás.

EJEMPLO.—*Reducir a común denominador las fracciones* $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}$.

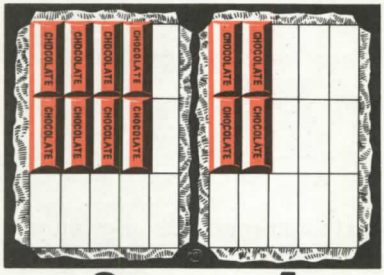
Se obtiene:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times7\times8}{3\times7\times8}=\frac{\mathbf{112}}{\mathbf{168}}; \qquad \frac{4}{7}=\frac{4\times3\times8}{7\times3\times8}=\frac{\mathbf{96}}{\mathbf{168}}$$

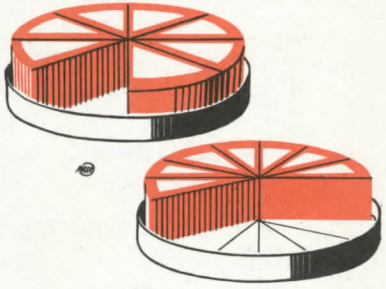
$$\frac{5}{8}=\frac{5\times3\times7}{8\times3\times7}=\frac{\mathbf{105}}{\mathbf{168}}$$

197. Comparación de fracciones. — Ya que una fracción es un cociente exacto, si dos fracciones tienen el mismo denominador, la mayor es la que tiene mayor numerador (propiedad de la división).

Así, $\frac{8}{15}$ es mayor que $\frac{4}{15}$.



$\frac{8}{15} > \frac{4}{15}$



$\frac{7}{8} > \frac{7}{12}$

Análogamente, de dos fracciones que tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador (propiedad segunda de la división). Así, $\frac{7}{8}$ es mayor que $\frac{7}{12}$.

Si las fracciones tienen distintos los numeradores y denominadores, se reducen a común denominador y se efectúa la comparación.

Así, $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{3}{5}$, pues

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \text{ y } \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

CÁLCULO MENTAL

- *Di* qué valor tiene una fracción de numerador y denominador iguales; y una fracción cuyo denominador es la unidad.
- *Di* qué fracción de ángulo recto representan los ángulos de: 30°, 12°, 45°, 60°, 120°, 150°.

- *Calcula* mentalmente una fracción equivalente a cada una de las siguientes:

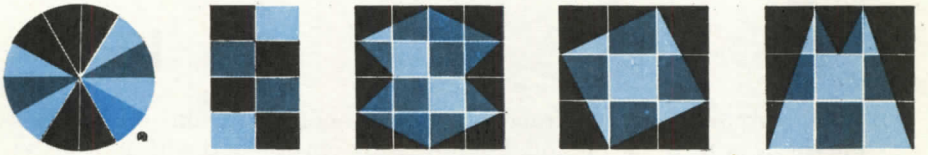
$$\frac{3}{6};\ \frac{2}{10};\ \frac{5}{15};\ \frac{6}{18};\ \frac{4}{26};\ \frac{8}{48};\ \frac{10}{30};\ \frac{6}{24}$$

- *Reduce* a la unidad inferior:

$\frac{1}{4}$ litro; $\frac{3}{4}$ de hora; $\frac{12}{30}$ de mes; $\frac{2}{7}$ de semana;

$\frac{5}{24}$ de día; $\frac{15}{60}$ de hora; $\frac{7}{12}$ de año

- *Calcula* la fracción que representa la parte coloreada de los siguientes gráficos:



EJERCICIOS

Simplifica las siguientes fracciones:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1.	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{21}$
2.	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{5}{30}$
3.	$\frac{6}{15}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{20}{4}$	$\frac{8}{72}$
4.	$\frac{20}{30}$	$\frac{30}{20}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{36}{63}$	$\frac{33}{63}$	$\frac{18}{27}$
5.	$\frac{21}{77}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{56}{72}$	$\frac{72}{72}$	$\frac{36}{48}$

Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

6. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; **7.** $\frac{2}{5}, \frac{1}{10}$; **8.** $\frac{5}{6}, \frac{1}{12}$;

9. $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}$; **10.** $\frac{2}{15}, \frac{3}{10}$; **11.** $\frac{10}{12}, \frac{20}{30}$;

12. $\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{12}$; **13.** $\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{3}{14}$; **14.** $\frac{7}{18}, \frac{5}{12}, \frac{11}{24}$

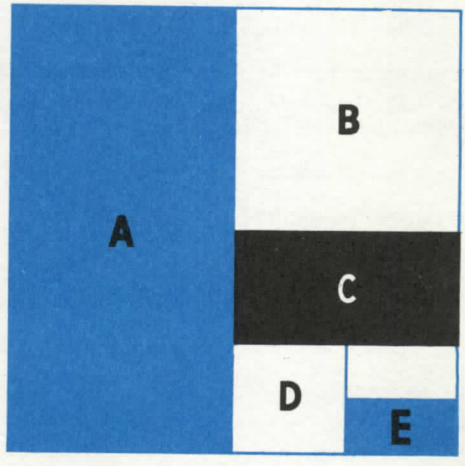
15. Dispón en orden de magnitud creciente:

1.º $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}$ y $\frac{2}{3}$; 2.º $\frac{7}{18}, \frac{5}{12}$ y $\frac{1}{3}$; 3.º $\frac{7}{15}, \frac{8}{14}$ y $\frac{1}{2}$

16. En los siguientes pares de fracciones, ¿cuál es la mayor?

1.º $\frac{40}{56}$ y $\frac{56}{72}$; 2.º $\frac{15}{35}$ y $\frac{33}{88}$; 3.º $\frac{7}{36}$ y $\frac{13}{48}$

17. Juan y Andrés encuentran 5 peras en un árbol abandonado, y se las reparten fraternalmente. ¿Cuánto le toca a cada uno?



18. ¿Qué parte del cuadrado total de la figura adjunta son los rectángulos A, B, C, D y E?

19. De una cesta de huevos se han roto 7 huevos, que son $\frac{1}{8}$ de los que había. ¿Cuántos huevos contenía la cesta? ¿Cuántos quedan?

20. Juan da los $\frac{3}{4}$ de sus bolas a sus compañeros y le quedan 22 bolas. ¿Cuántas poseía al principio?

21. De un tonel se sacan los $\frac{4}{5}$ del vino que contiene y quedan 52 litros. ¿Cuántos contenía al principio?

22. Matilde sale de casa con 84 ptas. Paga $\frac{1}{4}$ de esta cantidad en un medicamento que compra en la farmacia, y $\frac{1}{3}$ de la misma en la panadería. ¿Cuánto dinero lleva al volver a casa?

23. El agua al congelarse aumenta su volumen en $\frac{1}{10}$ del mismo. ¿Qué volumen ocuparán 200 litros de agua después de helarse?

24. Al tostar el café, éste pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. Un comerciante tiene 80 kg de café verde. ¿Cuánto pesará éste después de tostarlo?

25. Un chico recibe $\frac{1}{5}$ de las manzanas de una caja, y otro recibe $\frac{1}{6}$ de las mismas. ¿Quién recibe mayor cantidad? Si la caja tiene 30 manzanas, ¿cuántas recibe cada chico?

26. Un labrador siega en un día $\frac{1}{7}$ de una finca. ¿Cuántos días tardará en segar toda la finca? ¿Cuánto ganará, si cobra 87 ptas. por día?

27. ¿Qué fracción del libro he estudiado, si estoy en la página 68 de las 208 que tiene el libro?

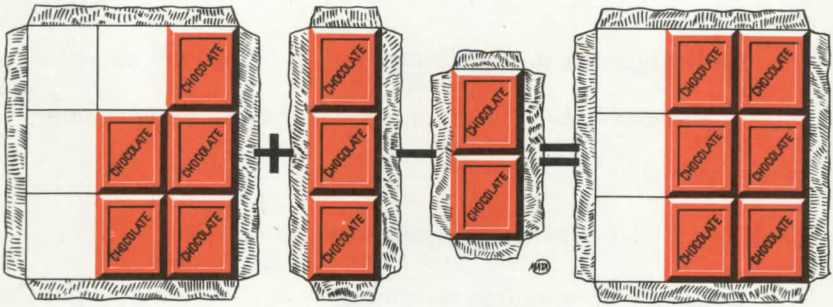
28. ¿Cuántas bolas tiene Martín en su bolsa si las que están fuera son $\frac{1}{9}$ de las de dentro?

29. En la mesa hay 5 comensales, cada uno de los cuales consume $\frac{1}{4}$ de litro de vino. ¿Cuánto consumen en total?

35

Operaciones con fracciones

198. Adición y sustracción de fracciones. — *Luisito recibe de su mamá* $\frac{5}{9}$ *de una tableta de chocolate y de su papá* $\frac{3}{9}$ *de la misma tableta, pero regala a su hermana* $\frac{2}{9}$ *de tableta. ¿Cuánto le queda?*



$$\frac{5}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$$

Le queda

$$\frac{5}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5+3-2}{9} = \frac{6}{9}$$

Para sumar o restar fracciones se reducen primeramente a común denominador y después se suman o restan los numeradores, conservando el denominador común.

Para sumar un número entero con una fracción, se escribe el entero como fracción, poniéndole por denominador la unidad, y se aplica la regla anterior. Del mismo modo se procede para restar de un entero una fracción o viceversa.

EJEMPLOS:

1.º $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{12}{60} =$

$$= \frac{40 + 45 - 12}{60} = \frac{73}{60}$$

2.º $3 + \frac{2}{7} = \frac{3}{1} + \frac{2}{7} = \frac{21}{7} + \frac{2}{7} =$

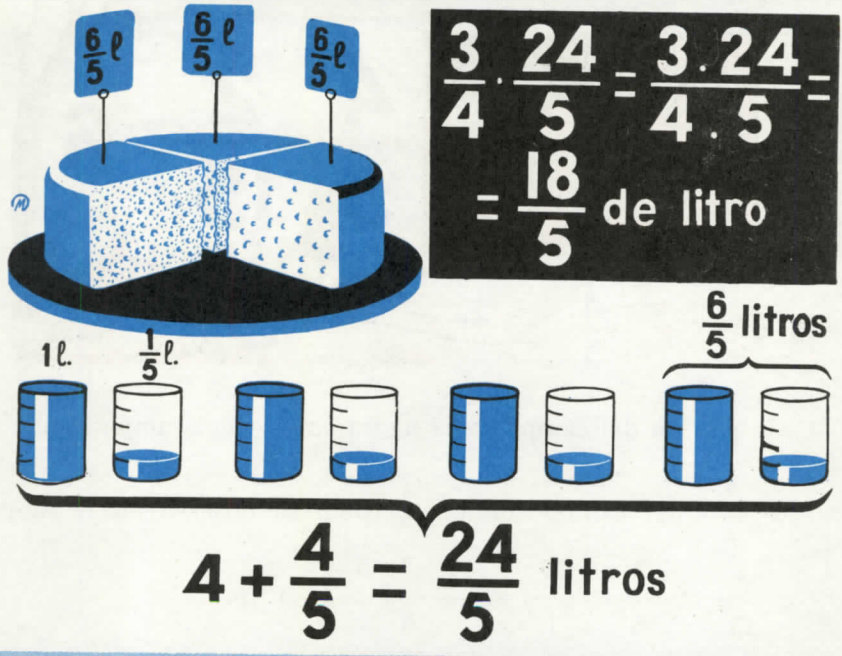
$$= \frac{21 + 2}{7} = \frac{23}{7}$$

199. Multiplicación de fracciones. —*Para hacer un queso se necesitan* $\frac{24}{5}$ *litros de leche. ¿Cuántos litros serán necesarios para hacer* $\frac{3}{4}$ *del mismo queso?*

SOLUCIÓN: Evidentemente se necesitarán $\frac{24}{5} \cdot \frac{3}{4}$.

Para calcular este producto razonaremos del siguiente modo: Para hacer 1 cuarto del queso se necesitará una cantidad de leche 4 veces menor, o sea $\frac{24}{5 \cdot 4}$ litros de leche, pues siendo las partes en que se divide la unidad 4 veces más pequeñas, la cantidad de leche es 4 veces menor; y para hacer 3 cuartos del queso será necesaria una cantidad de leche 3 veces mayor, o sea $\frac{24 \cdot 3}{5 \cdot 4}$ litros, ya que habiendo 3 veces más de partes que antes, la cantidad de leche es 3 veces mayor. Luego

$$\frac{24}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 3}{5} = \frac{18}{5} \text{ de litro}$$



Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores para formar el numerador del producto, y se multiplican los denominadores para formar el denominador del producto.

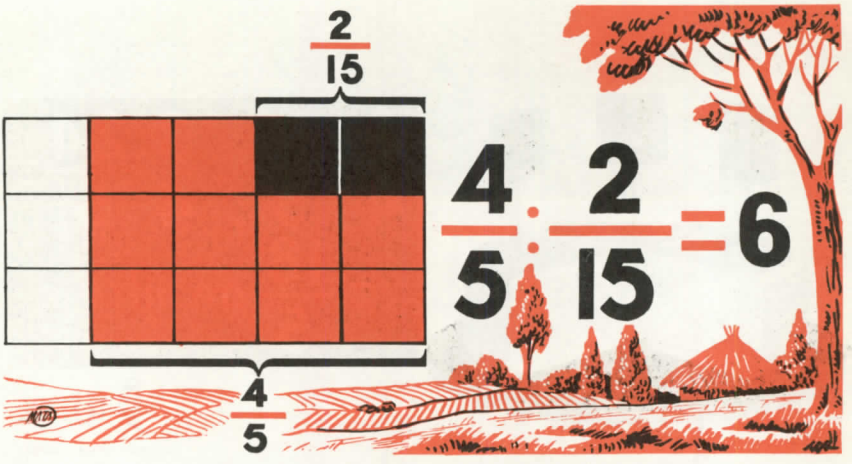
Para multiplicar un entero por una fracción, se escribe el entero como quebrado, poniéndole por denominador la unidad, y se aplica la regla anterior.

EJEMPLOS:

$$1.^{\circ}\quad \frac{5}{4}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{3}{11}=\frac{5\cdot 16\cdot 3}{4\cdot 15\cdot 11}=\frac{4}{11}$$

$$2.^{\circ}\quad 3\times\frac{5}{60}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{60}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$$

200. División de fracciones. —*¿Cuántas veces cabe* $\frac{2}{15}$ *en* $\frac{4}{5}$*?*



Cada parcela del campo de la figura es $\frac{8}{15}$ del campo total.

Los $\frac{4}{5}$ del campo contienen, como se observa en la figura,

$$\frac{4}{5} : \frac{1}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{5} = 12 \text{ parcelas}$$

y

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 6 \text{ dobles parcelas}$$

Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Para dividir un entero por un quebrado o recíprocamente se puede escribir el entero en forma de fracción, poniéndole como denominador la unidad, y se aplica la regla anterior.

EJEMPLOS:

1.º $\frac{25}{44} : \frac{65}{11} = \frac{25}{44} \cdot \frac{11}{65} = \frac{25 \cdot 11}{44 \cdot 65} = \frac{5}{4 \cdot 13} = \frac{5}{52}$

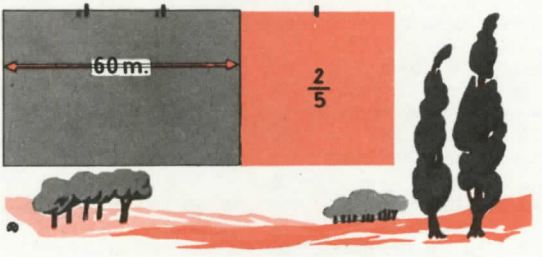
2.º $3 : \frac{5}{24} = \frac{3}{1} \cdot \frac{24}{5} = \frac{3 \cdot 24}{5} = \frac{72}{5}$

CÁLCULO MENTAL

- *Halla* el valor de:

$\frac{3}{4}$ de 20 pesetas; $\frac{2}{5}$ de 25 duros; $\frac{3}{8}$ de 32 días;
$\frac{2}{7}$ de 21 años; $\frac{5}{7}$ de 35 kg; $\frac{2}{9}$ de 18 obreros.

- *Calcula* la longitud del campo:



EJERCICIOS

Hallar el valor de:

1. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ **2.** $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ **3.** $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

5. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **6.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{3}{8}+\frac{5}{16}$ **8.** $\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$

9. $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ **10.** $\frac{5}{18}-\frac{2}{9}$ **11.** $\frac{8}{9}-\frac{2}{27}$ **12.** $\frac{16}{25}-\frac{3}{5}$

13. $\frac{7}{12}-\frac{11}{24}$ **14.** $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}$ **15.** $\frac{2}{3}-\frac{1}{8}$ **16.** $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$

17. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ **18.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ **19.** $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$

20. $\frac{5}{18}+\frac{2}{9}-\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{8}{21}+\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$ **22.** $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}+\frac{2}{35}$

Halla los productos siguientes:

23. $\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$ **24.** $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}$ **25.** $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$ **26.** $\frac{1}{8}\times\frac{4}{9}$

27. $\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}$ **28.** $\frac{4}{5}\times\frac{10}{13}$ **29.** $\frac{7}{9}\times\frac{5}{14}$ **30.** $\frac{5}{8}\times\frac{11}{15}$

31. $\frac{11}{7}\times\frac{7}{11}$ **32.** $\frac{11}{18}\times\frac{9}{22}$ **33.** $\frac{16}{21}\times\frac{7}{8}$ **34.** $\frac{35}{11}\times\frac{11}{35}$

Hallar los cocientes de las divisiones siguientes:

35. $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ **36.** $1 : \frac{2}{5}$ **37.** $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$

38. $3 : \frac{1}{3}$ **39.** $3 : \frac{2}{3}$ **40.** $5 : \frac{5}{6}$

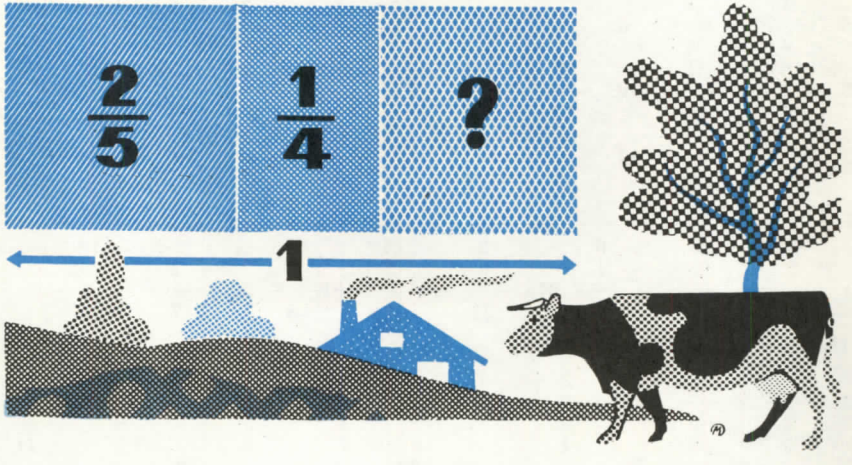
41. $\frac{3}{2} : \frac{1}{2}$ **42.** $\frac{11}{6} : \frac{11}{2}$ **43.** $\frac{9}{2} : \frac{9}{4}$

44. Se venden primero $\frac{7}{11}$, luego $\frac{1}{5}$ del vino de un tonel. ¿Qué fracción del vino queda en el tonel?

45. Los $\frac{2}{3}$ de una finca se han sembrado de trigo, y $\frac{1}{4}$ de patatas. ¿Qué parte queda para el maíz?

46. Margarita ha recibido los $\frac{2}{5}$ de un pastel y Pablito ha recibido $\frac{1}{4}$ del mismo. ¿Qué parte del pastel queda por repartir?

47. Se divide un prado en tres partes: la primera es los $\frac{2}{5}$ y la segunda $\frac{1}{4}$ del prado. ¿Cuál es la mayor de las tres, y cuánto sobrepasa a la siguiente?



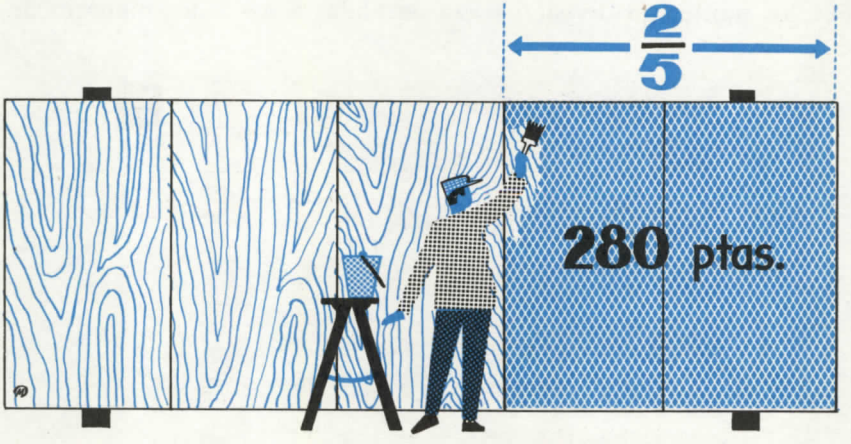
48. A Enrique le regalaron $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de una tableta de chocolate. ¿Qué parte de la tableta recibió?

49. ¿Cuánto cobrará un comerciante por la venta de $\frac{3}{5}$ de un quintal métrico de arroz, a $\frac{26}{3}$ ptas. el kilogramo?

50. ¿Cuánto deberé abonar por la compra de $\frac{3}{4}$ de litro de vino, a $\frac{27}{5}$ pesetas el litro?

51. En una excursión caminamos con una velocidad media de $\frac{16}{3}$ km/h. ¿Cuánto hemos andado después de $\frac{11}{4}$ de hora?

52. Por los $\frac{2}{5}$ de un trabajo, un obrero recibió 280 ptas. ¿Cuánto habría recibido si hubiera realizado el trabajo completo?



53. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de una rueda si con $\frac{100}{11}$ de metro se le dan 10 vueltas?

54. Si 19 carros llevan $\frac{38}{5}$ de tonelada de carbón, ¿qué peso lleva cada uno?

55. Hallar la longitud de 100 rieles de $\frac{57}{10}$ de m cada uno.

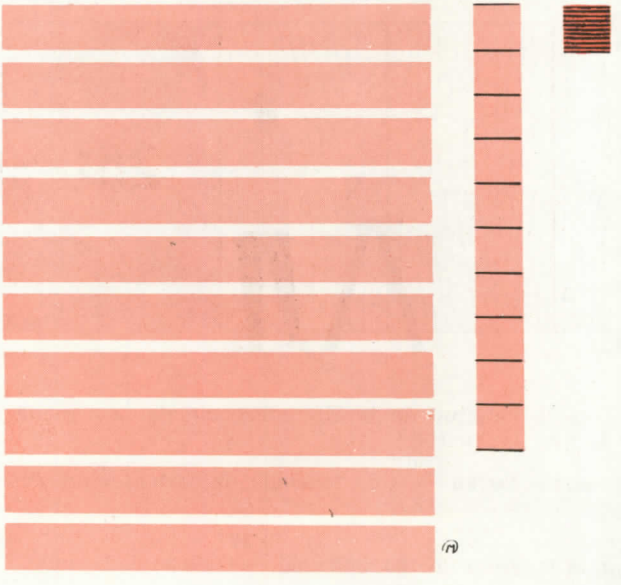
56. Si 31 metros de alambre cuestan $\frac{310}{3}$ de peseta, ¿cuánto cuesta 1 metro?

57. Mientras que un ciclista hace los $\frac{3}{7}$ de una distancia, un coche hace los $\frac{5}{8}$ de la misma. ¿Quién va más deprisa? ¿Cuántas veces más deprisa?

36

Números decimales

201. Unidades decimales. — Toma una cuartilla blanca. Mediante la regla graduada divide el lado más largo en 10 partes iguales. Por los puntos de división traza paralelas a los lados menores de la



cuartilla. Recorta luego a lo largo de estas paralelas, obteniendo diez bandas o tiras de papel. Cada una se dice que es *una décima parte* de la cuartilla, y se representa así:

$$1 \text{ décima} = 0'1$$

Toma 4 de las tiras de papel. Valen 4 décimas de la cuartilla, y se representan así:

$$4 \text{ décimas} = 0'4$$

Divide una de las tiras en 10 partes iguales. Cada trozo es una décima de la tira. ¿Cuántos trozos de éstos contiene toda la cuartilla?

Contiene $10 \cdot 10 = 100$ trozos.

Cada trozo se dice que es *una centésima* de la cuartilla, y se representa así:

$$1 \text{ centésima} = 0'01$$

Si tenemos 51 de estos trozos, valen

$$51 \text{ centésimas} = 0'51$$

Cada trozo divídelo a su vez en 10 pequeñas tiras. Cada una de éstas es 1 décima del trozo, una centésima de la tira grande y *una milésima* de la cuartilla. Se representa así:

$$1 \text{ milésima} = 0'001$$

Ejemplos. 1. Escribe 38 milésimas:

$$38 \text{ milésimas} = 0'038$$

2. Representa 215 milésimas:

$$215 \text{ milésimas} = 0'215$$

3. Tenemos 2 cuartillas, 8 tiras grandes, 4 trozos y 6 tiras pequeñas. Representa la cantidad de cuartillas que tenemos.

Poseemos:

$$2'846 \text{ cuartillas.}$$

202. Convenios de numeración decimal. —Se han adoptado los siguientes convenios:

1.° *Toda cifra colocada a la derecha de otra representa unidades del orden inmediatamente inferior.*

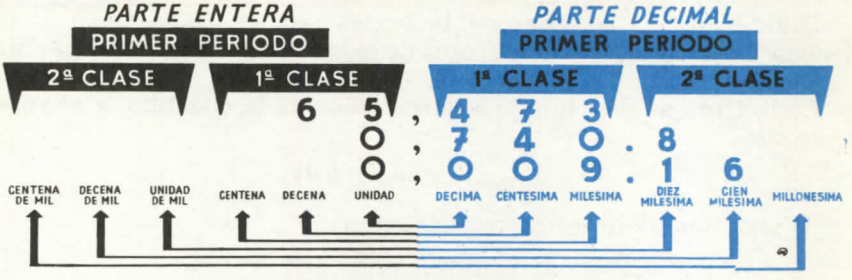
2.° *Se separa con una coma la parte entera de las cifras que representan unidades decimales.*

3.° *Se escribe 0 en lugar de la parte entera cuando es nula, y también en lugar de cada orden decimal que falte.*

Nota. — La *parte entera* de un número decimal es el número entero que precede a la coma; la *parte decimal* es el número decimal

que se obtiene reemplazando la parte entera por cero. Las cifras que siguen a la coma son *las cifras decimales* o *los decimales.*

He aquí los diversos órdenes de unidades enteras y decimales:



203. Regla para la lectura de números decimales. — *Se enuncia primero la parte entera seguida de la palabra unidades; luego, la parte decimal como si representara un número entero, dándole el nombre de la unidad decimal expresada por la última cifra.*

EJEMPLOS:

45'73 se lee 45 unidades, 73 centésimas.
0'0082 se lee 82 diezmilésimas.
9'053746 se lee 9 unidades, 53 mil 746 millonésimas.

204. Propiedades de los números decimales. — Se tiene:

$$2'47 = 2'4700.$$

I. El valor de un número decimal no varía añadiendo o suprimiendo ceros de su derecha.

Se tiene:

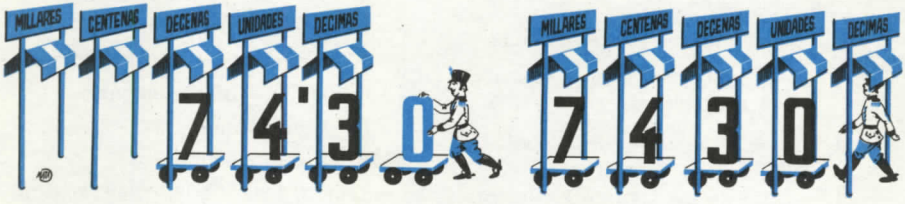
$$8'43 \times 10 = 84'3$$

II. Si en un número decimal se corre la coma uno, dos, tres... lugares hacia la derecha, queda multiplicado por 10, 100, 1000...; si, por el contrario, se corre la coma uno, dos, tres... lugares hacia la izquierda, queda dividido por 10, 100, 1000...

NOTA. — Si el número decimal no tuviese bastantes cifras para aplicar las reglas anteriores, se escribe un número suficiente de ceros a su derecha o a su izquierda. Así:

$$74'3 \times 100 = 7430 \quad \text{y} \quad 85'27 : 1000 = 0'08527$$

En la figura se observa que para multiplicar por 100 se corre la coma dos lugares a la derecha, y que cada cifra ha corrido dos lugares u órdenes hacia la izquierda.



CÁLCULO MENTAL

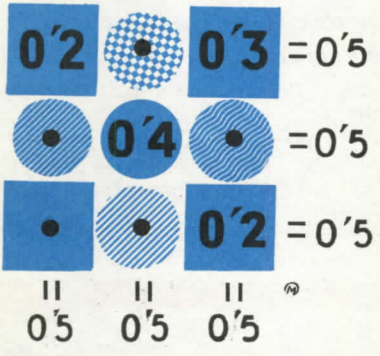
- **Lee** los siguientes números decimales:

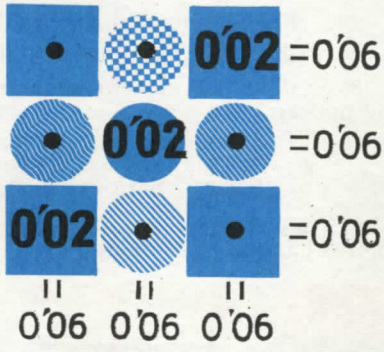
4'7;	3'68;	51'96;	7'02;	10'08;	0'451
0'07;	5'005;	0'01;	3'196;	31'96;	319'6
20'8;	2'08;	0'208;	0'0208;	23'23;	0'023

- **Responde:**

1 décima = ... milésimas; 3 centésimas = ... diez milésimas;
8 unidades = ... décimas; 43 unidades = ... centésimas;
5 centésimas = ... milésimas; 8 décimas = ... cien milésimas;
34 milésimas = ... millonésimas; 37 centésimas = ... millonésimas.

- **Sustituye** los puntos por los números decimales convenientes, en el primer cuadrado, para que sumando te dé ¡0'5 por todas partes!





- **Coloca** en los cuadritos libres del segundo cuadro los números 0'01 ó 0'03, de modo que sumando te dé ¡0'06 por todas partes!

EJERCICIOS

Escribe con números decimales y efectúa:

1. 7 unidades + 5 décimas.

2. 6 décimas + 2 centésimas.

3. 4 unidades + 6 décimas + + 8 centésimas.

4. 39 + 1 décima + 2 centésimas.

5. 50 + 5 centésimas.

6. 500 + 5 milésimas.

7. 3 décimas + 4 centésimas.

8. 30 + 4 diezmilésimas.

9. 9 milésimas.

10. 8 millonésimas.

11. ¿Cuál de los siguientes decimales es mayor: 0'0202, 0'202, 0'2002? ¿Cuál es el menor?

12. En una medida aproximada de un segmento se ha obtenido 8'6 cm. La verdadera longitud es 8'63 cm. ¿Cuál es el error?

Multiplica:

13. 2'467 por 10, por 100, por 10000.

14. 3'062 por 10, por 1000, por 10000.

15. 41'32 por 10, por 10^2, por 10^3.

16. 0'0091 por 100, por 10^3, por 10000.

17. 0'083 por 10000, por 100, por un millón.

Divide:

18. 409'32 por 10, por 100, por 1000.

19. 803'2 por 100, por 1000, por 10000.

20. 0'7 por 10, por 1000, por 10000.

21. 6234 por 100, por 1000, por 10000.

22. 90 por 1000, por 10000, por un millón.

23. ¿Por qué número debe multiplicarse a 0'0324 para obtener 3'24?

24. ¿Por qué número debe dividirse a 4090'2 para obtener el cociente 4'0902?

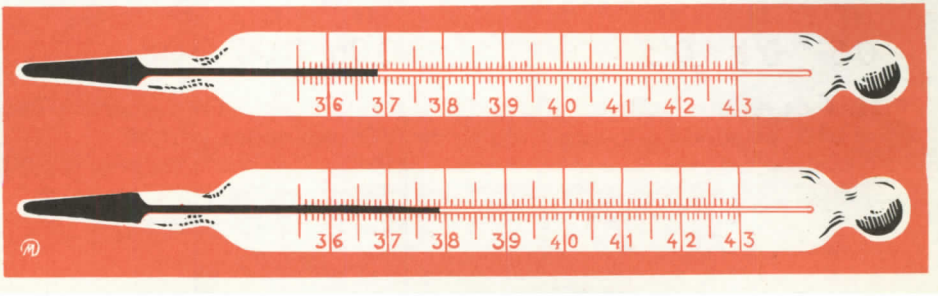
25. ¿Por qué número se debe multiplicar:

a) 0'5481 para dar 5'481?
b) 0'00893 para dar 8'93?
c) 0'000071 para dar 7'1?

26. ¿Por qué número se debe dividir:

a) 702'6 para dar 7'026?
b) 8004'71 para dar 8'00471?
c) 35'021 para dar 3'5021?

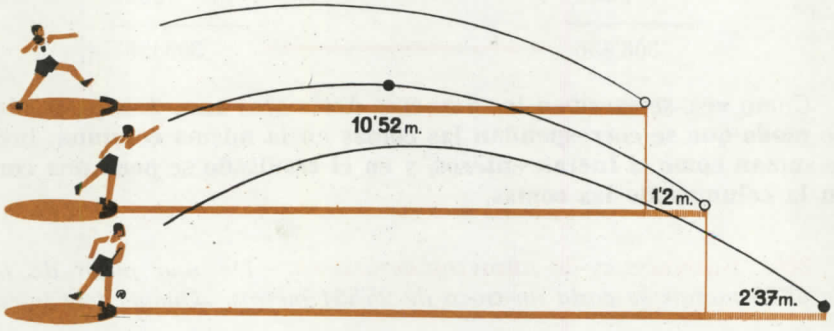
27. Expresar en grados y décimas la temperatura que marcan los termómetros clínicos de la figura.



37

Adición y sustracción de números decimales

205. Adición de números decimales. — *El primer atleta ha lanzado*



el peso a 10'52 m; el segundo, 1'2 m más que el anterior; y el tercero, 2'37 m más que el segundo. ¿A qué distancia lanzó la bola el tercer atleta?

La distancia viene dada por

$$(10'52 + 1'2 + 2'37) \text{ m.}$$

Observa que 10'52 unidades son 1052 centésimas; 1'2 unidades son 120 centésimas; y 2'37 unidades son 237 centésimas. Podemos hacer la adición en centésimas y luego pasar el resultado a unidades. Lo representamos por el siguiente esquema:

metros		*centímetros*
10'52	→	1052
1'2	→	120
2'37	→	237
14'09	←	1409

EJEMPLO. *Una pieza de tela mide 53'8 m; otra, 247'62 m, y una tercera, 7'036 m. ¿Cuánto miden entre las tres?*

Miden entre las tres

$$(53'8 + 247'62 + 7'036) \text{ m.}$$

Se reducen todos a mm, se suman como si fueran enteros, y el resultado vuelve a reducirse a metros, como en el siguiente esquema:

metros		*milímetros*
53'8	→	53800
+ 247'62	→	+ 247620
+ 7'036	→	+ 7036
308'456	←	308456

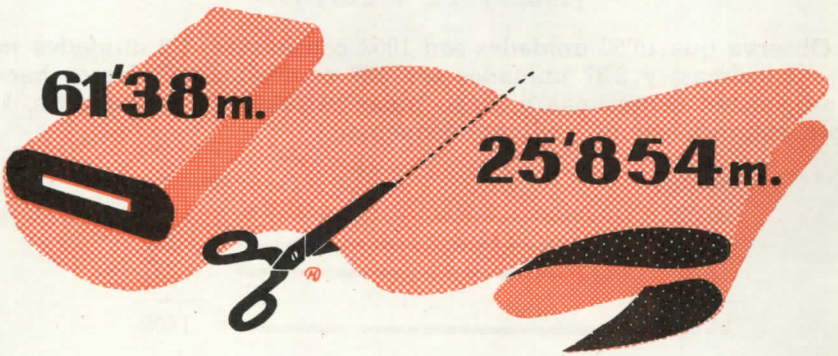
Como ves, **se escriben los números decimales unos debajo de otros de modo que se correspondan las comas en la misma columna; luego se suman como si fueran enteros, y en el resultado se pone una coma en la columna de las comas.**

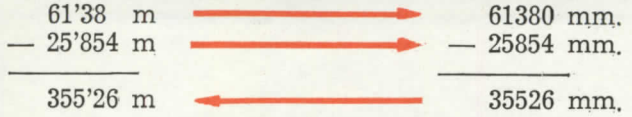
206. Sustracción de números decimales. —*De una pieza de tela de 61'38 metros se corta un trozo de 25'854 metros. ¿Cuánta tela queda?*

Quedan:

$$61'38 - 25'854 \text{ metros.}$$

Para efectuar esta diferencia aplicaremos el mismo esquema que para la adición:





EJERCICIOS

1. La adición y sustracción de números decimales, ¿tienen las mismas propiedades que la adición y sustracción de números naturales?

Suma:

2. 6'07 + 7'1 + 4'33.
3. 0'31 + 4'007 + 2'683.
4. 36 + 0'72 + 3'3.
5. 0'63 + 9'072 + 300.
6. 7'2 + 5 + 3'8.
7. 8 + 0'8 + 8'08.
8. 13'002 + 5'378 + 2'12.
9. 7'1 + 2'81 + 0'09.
10. 14'4 + 7 + 0'23 + 8'37.
11. 13'9 + 5'05 + 10'45.

Resta:

12. 4'9 de 7'2.
13. 0'89 de 1'7.
14. 0'75 de 1.
15. 2'4 de 3'81.
16. 0'03 de 3.
17. 0'031 de 0'25.
18. 0'56 de 1'85.
19. 0'007 de 5'2.
20. 0'7 de 7'02.

Efectúa:

21. 5 + 0'07 — 1'63.
22. 21'93 — 2'4.
23. 1'23 + 3'47 + 2'68 — 7'38.
24. 7 — 0'7 — 0'007 — 0'0007.
25. 0'005 + 2'495 — 1'5.
26. 10'06 — 0'6.
27. 15'99 — (3'64 + 2'36).
28. 26 — (3'46 + 7'6) — 4'94.

29. ¿Qué número decimal debe añadirse a la suma 5'7, 0'08 y 14'219 para obtener en total 20?

30. Hago compras de: 13 pesetas 90 céntimos al confitero; 5 pesetas 5 céntimos al panadero, 45 céntimos en manzanas y también un libro que me cuesta 10 pesetas. ¿Cuál es mi gasto total? ¿Cuánto me queda de las 30 pesetas que tenía?

31. Los lados de un triángulo miden 4'86 m, 5'52 m y 3'61 m. ¿Cuánto falta a la suma para llegar a 14 m?

32. Una caña de pescar consta de tres piezas cuyas longitudes son 1'33 m, 1'06 m y 0'9 m. ¿Cuál es la longitud de la caña si hay una disminución de 9 centímetros en las uniones de las tres piezas?

33. Viajo en bicicleta 15'26 km; en tren, 73'5 km; luego, a pie, 740 m hasta mi casa. ¿Cuánto falta a mi recorrido para llegar a 90 km?

34. ¿Qué error cometo al tomar 6 km como equivalente a la suma de 4'206 km, 0'078 km y 1'717 km?

35. De 100 m de alambre corto longitudes de 14'2 m, 17'4 m y 3'5 m. ¿Cuánto queda?

36. ¿Qué decimal debe restarse de 3 para que la diferencia sea 1'693?

38

Multiplicación y división de números decimales

207. Multiplicación de números decimales. — *Una alfombra tiene 2'75 m de largo y 1'9 m de ancho. ¿Cuál es su área y cuál su coste a razón de 78'25 pesetas el metro cuadrado?*

Solución: El área es

$$2'75 \text{ m} \times 1'9 \text{ m} = x \text{ m}^2$$

No sabemos de momento multiplicar números decimales, pero podemos proceder así: reducimos los metros a centímetros, con lo que todos los números que resultan son enteros; operamos con éstos, y a continuación transformamos los cm^2 en m^2. Observamos entonces que el producto tiene tantas cifras decimales como hay en el multiplicando y multiplicador. Así:

$$\text{Largo} = 2'75 \text{ m} = 275 \text{ cm}$$
$$\text{Ancho} = 1'9 \text{ m} = 190 \text{ cm}$$
$$\text{Área} = 275 \text{ cm} \times 190 \text{ cm} = (275 \times 190) \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{r} 275 \\ \times 190 \\ \hline 2475 \\ 275 \\ \hline 52250 \end{array} \ cm^2$$

o sea

$$\begin{array}{r} 2'75 \\ \times 1'9 \\ \hline 2475 \\ 275 \\ \hline 5'225 \end{array}$$

3 cifras decimales

3 cifras decimales

El área de la alfombra es 52.250 cm^2, o sea 5'225 m^2.

Su coste: 5'225 × 78'25 pesetas

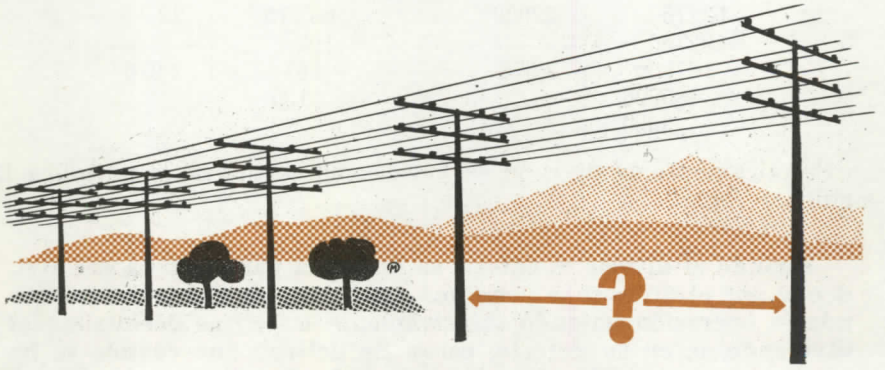
$$
\begin{array}{r}
5'225 \\
\times 78'25 \\
\hline
26125 \\
10450 \\
41800 \\
36575 \\
\hline
408'85625
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\} \text{5 cifras decimales} \\
\downarrow \\
\\
\\
\\
\text{5 cifras} \\
\leftarrow \text{decimales}
\end{array}
$$

La multiplicación de decimales se efectúa como la de enteros; pero se separan a la derecha del producto, por medio de una coma, tantas cifras decimales como tienen el multiplicando y multiplicador juntos.

208. Aproximación del cociente de dos números naturales hasta un orden decimal dado. — *Entre dos puntos que distan entre sí 734 metros se quiere tender un hilo por medio de 18 postes colocados a intervalos iguales (17 intervalos). ¿Cuánto distan entre sí dos postes consecutivos?*

Distarán:

$$\frac{734}{17}$$



734	17
54	
30	43'17
130	
11	

Razonamos así: 73 decenas repartidas entre 17 resulta a 4, y sobran 5 decenas, o sea 50 unidades, que con las 4 del dividendo, son 54. Estas 54 unidades, entre 17, toca a 3 y sobran 3 unidades, o sea 30 décimas, que, repartidas entre 17, toca a 1 décima y sobran 13 décimas, o sea 130 centésimas, que, repartidas entre 17, toca a 7 centésimas y sobran 11. Así se puede proseguir la división hasta la cifra decimal que se desee.

Se efectúa primero la división de los dos números; se pone entonces una coma en el cociente y se prosigue la división escribiendo un cero a la derecha del resto y también de los restos siguientes. Se detiene uno cuando se ha escrito en el cociente el número deseado de cifras decimales.

209. División de números decimales. —EJEMPLO 1.º *Una pieza de tela de 63'275 metros se corta en 22 trozos iguales. ¿Cuánto mide cada trozo?*

Cada trozo mide: 63'275 / 22.

O sea, multiplicando dividendo y divisor por mil:

$$\frac{63275}{22 \cdot 1000} = \frac{63275}{22000}$$

Como se ha explicado en el número anterior, basta ahora dividir el numerador por el denominador, aproximando hasta la cifra decimal que se desee:

63275	22000
192750	
167500	2'876
135000	
3000	

63'275	22
192	
167	2'876
135	
3	

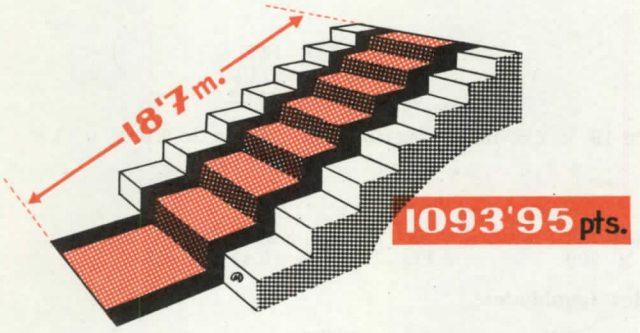
Prácticamente la división se hace como se indica, y se aplica la siguiente regla:

Cuando el divisor es entero, se divide la parte entera del dividendo por el divisor; se pone una coma en el cociente y se continúa la operación bajando sucesivamente las cifras decimales del dividendo, o, en su defecto, ceros. Se detiene uno cuando se ha escrito en el cociente el número deseado de cifras decimales.

EJEMPLO 2.° *La alfombra de una escalera tiene 18'7 metros de largo y cuesta 1093'95 pesetas. ¿Cuál es el precio de un metro de alfombra?*

Un metro de alfombra vale

$$\frac{1093'95}{18'70} = \frac{109395}{1870} = 58'5 \text{ ptas.}$$



109395	1870
15895	
9350	58'5
0000	

10939'5	187
1589	
935	58'5
000	

Prácticamente la operación se hace como se indica, y se aplica la siguiente regla:

Para dividir dos números decimales se multiplica el dividendo y el divisor por 10, 100, 1000..., según que haya 1, 2, 3... decimales en el divisor. Este se convierte así en un número entero, y se aplica la regla anterior.

NOTAS. — 1.ª Como se ve por los casos anteriores, el divisor debe ser siempre entero.

2.ª Al aplicar las reglas anteriores, puede suceder que una de las divisiones sucesivas dé resto 0. En este caso, el cociente aproximado es al mismo tiempo el cociente decimal exacto.

CALCULO MENTAL

- **Multiplica** mentalmente:

46'1 × 10	3'725 × 100	5'25 × 10
148'2 × 0'1	26'218 × 0'01	578'25 × 0'001
2'75 × 1000	13'74 × 0'1	925'78 × 0'01

● **Halla** el dividendo:

$$\ldots : 10 = 54'5 \quad ; \quad \ldots : 100 = 0'725$$
$$\ldots : 100 = 0'97 \quad ; \quad \ldots : 10 = 0'027$$
$$\ldots : 1000 = 0'05 \quad ; \quad \ldots : 100 = 0'4$$

EJERCICIOS

Halla el valor de:

1. 10'3 × 0'243.
2. 84 × 0'023.
3. 640 × 0'001275.
4. 8'016 × 125.
5. 0'0087 × 11'9.
6. 31'05 × 24'02.

7. Hallar el valor de 16 × 2'5; luego, escribir los valores de 1'6 × 0'25 y 160 × 0'025.

Halla el valor de:

8. 0'0875 × 50 × 0'8.
9. $(0'2)^2 \times (0'5)^3 \times 200$.
10. 1'25 × 3'2 × 2'375.
11. $1'625 \times (0'4)^2 \times 0'5$.

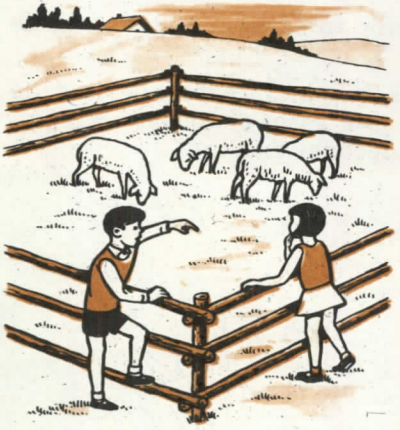
Completa las siguientes igualdades:

12. $\frac{5'6}{4} =$ **13.** $\frac{29'4}{7} =$ **14.** $\frac{33'6}{2} =$

15. $\frac{0'81}{2} =$ **16.** $\frac{0'81}{9} =$ **17.** $\frac{0'4}{8} =$

Efectúa los cocientes en menos de una diezmilésima.

18. 4'7 : 6.
19. 0'08571 : 25'603.
20. 28'294 : 21'37.
21. 8'6 : 9.
22. 4'6513 : 596'8.
23. 2'6576 : 72'81.



24. Cada volumen de un libro mide de grueso 3'6 cm; ¿cuál es el espesor de 3 volúmenes?

25. Si 1 kg = 2'116 libras, ¿cuál es el equivalente de 7 kg?

26. El redil de la figura es un cuadrado de 0'012 km de largo. ¿Cuánto mide su contorno? ¿Y cuál es la longitud total de los palos horizontales que lo circundan?

27. Halla la longitud de 4 rieles, si cada uno mide 13 m 75 cm.

28. Si recorro 115 metros en un minuto, ¿cuántos km recorreré en una hora?

29. Halla el coste de 6'4 m de tela a 7 pesetas 50 céntimos el m.

30. Hallar la fuerza que ejerce el vapor sobre una superficie cuadrada de 4'6 cm de lado si sobre cada cm^2 se ejerce una presión de 15 kg.

31. Admitiendo que la longitud de la circunferencia viene dada por la fórmula: circunferencia = diámetro × 3'1416, hallar: *a*) La circunferencia de una rueda de bicicleta de 56 cm de diámetro.

b) La longitud de una pista circular de 150 m de diámetro.

c) La longitud de un alambre de acero que da 4 vueltas a un cilindro de 4'5 m de diámetro.

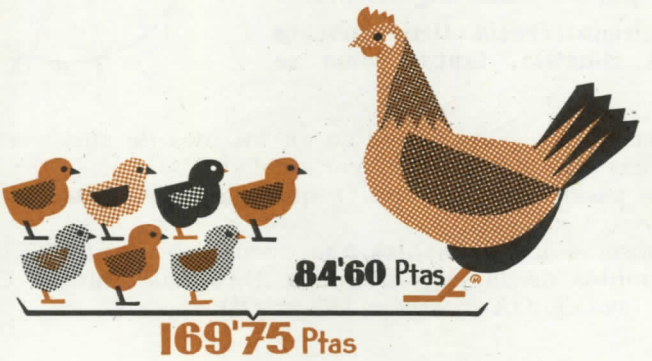
32. Un segmento de 3'5 cm de largo se divide en 5 partes iguales. ¿Cuántos cm corresponden a cada parte?

33. Un tendero vende dulces a 0'65 pesetas cada uno. Después de vender 120 ha ganado 24 pesetas. ¿Cuánto le costó a él la docena de dulces?

34. Se han comprado 115 litros de vino por 724'50 pesetas. ¿Cuál es el beneficio que se obtiene en cada litro de vino, si se vende a 9'40 pesetas el litro?

35. Un florista compra 45 ramos a 7'50 ptas. cada uno, y los revende ganando en total 288 ptas. ¿A cómo vendió cada ramo?

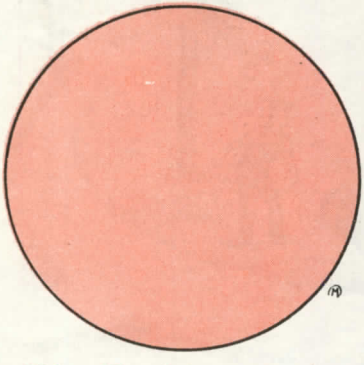
36. Con los datos del gráfico adjunto, plantea un problema y resuélvelo.



39

La circunferencia y el círculo

210. Definiciones. — Coloca sobre tu cuartilla una moneda, un bote de conservas o un objeto circular cualquiera. Aplica la punta del lápiz a su *borde* o contorno, y cálcalo sobre el papel. Has dibujado así una línea curva llamada *circunferencia.*

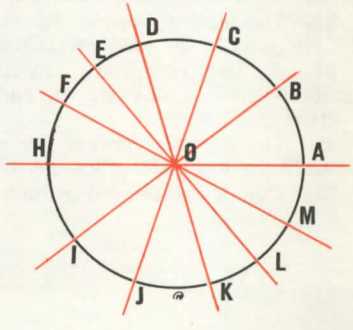


Recorta la cuartilla por dicha línea y tira el sobrante. Tienes en tus manos una figura geométrica llamada *disco* o *círculo.*

Precisamente la circunferencia es el borde del círculo.

211. Simetría en la circunferencia. —Por el mismo procedimiento que en el párrafo anterior, dibuja en tu papel transparente una circunferencia. Intenta hallar un eje de simetría de dicha curva, o sea dóblala de modo que una mitad coincida con la otra. Observarás que lo consigues fácilmente.

¿Sabrías trazar otros ejes de simetría del disco? ¿Cuántos? Verás que, por muchos que hayas trazado, siempre puedes trazar alguno más.



La circunferencia tiene muchos ejes de simetría, tantos como se quiera.

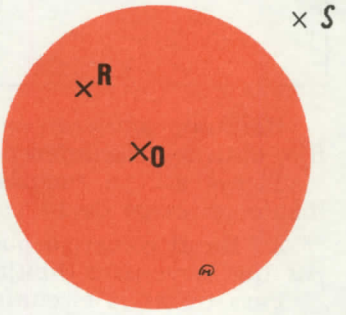
Ejemplos. 1. ¿Observas algo en los ejes de simetría de la circunferencia que has trazado por doblado?

Todos pasan por un punto O, que llamamos **centro** de la circunferencia.

2. Observa los segmentos que unen dicho centro O con los diversos puntos de la circunferencia. Se llaman **radios.** Comprueba que son iguales: OA = OB = OC = OD = ...

3. Comprueba también que el centro de la circunferencia O es un **centro de simetría** de la misma.

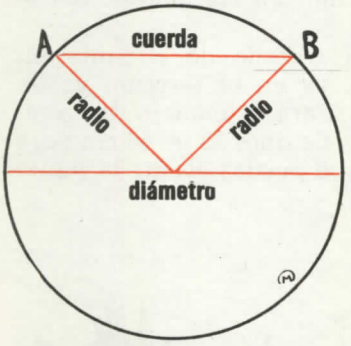
212. Puntos interiores y exteriores a la circunferencia. —Traza una circunferencia en un papel cualquiera, y recorta con las tijeras el disco correspondiente. Halla por doblado un eje de simetría del disco. Dicho eje divide al mismo en dos partes iguales, llamadas *semicírculos*.



Coloca el círculo sobre la mesa y señala un punto cualquiera del círculo, que no pertenezca a su borde. Se dice que es *interior* a la circunferencia. Por ejemplo, el punto R. ¿El centro O es interior a la circunferencia?

Señala ahora un punto cualquiera de la mesa que no pertenezca al disco. Por ejemplo, el S. Se dice que es *exterior* a la circunferencia.

213. Propiedad del diámetro de un círculo. —Une entre sí por un segmento dos puntos A y B de una circunferencia. El segmento AB se denomina *cuerda*. ¿Cuál es la mayor de las cuerdas? Evidentemente, la que pasa por el centro O de la circunferencia. Dicha cuerda se llama *diámetro*, y es claro que equivale a dos radios. Es fácil demostrar que **el diámetro es la mayor de las cuerdas.** Para ello une el centro O con los puntos A y B de la circunferencia. Sabemos que

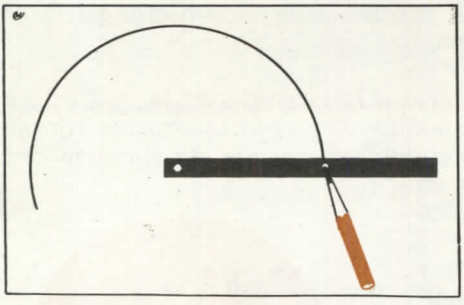


$$AB < OA + OB$$

porque un lado del triángulo OAB es menor que la suma de los otros dos. Pero OA + OB = diámetro. Luego

$$AB < \text{diámetro}$$

214. Construcción de la circunferencia. — Hemos comprobado que todos los puntos de la circunferencia distan igual (o equidistan) de uno interior, llamado centro. Luego cualquier método que nos permita mantener invariable la distancia a un punto fijo será adecuado para el trazado de circunferencias.



1. Toma una cartulina y una tira de cartón, que sujetarás a un punto de la cartulina mediante un encuadernador. Con el bolígrafo haz un agujero en otro punto de la tira, y gira ésta al mismo tiempo que aprietas la punta del bolígrafo sobre la cartulina. Obtendrás una circunferencia perfecta.

Haciendo agujeros en la tira a diferentes distancias del punto fijo, obtienes circunferencias de diversos radios.

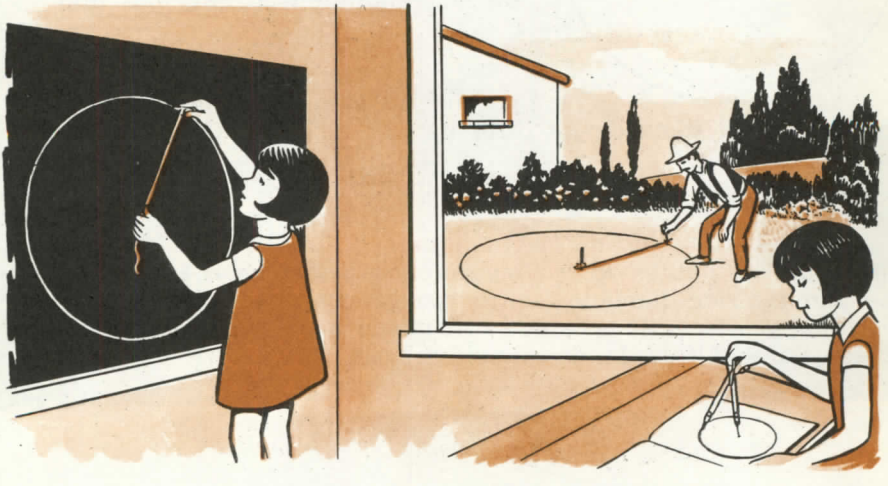
Tienes así un compás rudimentario que emplearás provechosamente en casos de necesidad.

2. En el comercio puedes adquirir el instrumento llamado *compás*, que sirve para dibujar circunferencias.

Para trazar la circunferencia se fija en el centro la punta afilada y se hace girar la otra pieza de modo que vaya describiendo la curva, cuidando de mantener invariable su distancia al centro.

3. Para construcciones en el tablero o en el terreno es mejor valerse de un hilo o cuerda tirante, como indican las figuras. Así lo hacen los jardineros.

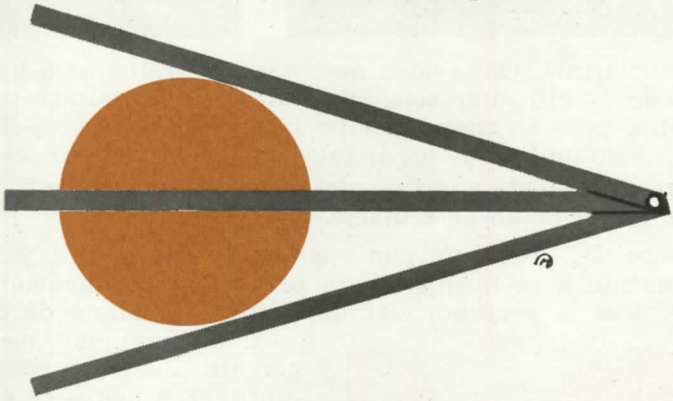
Conviene que adquieras soltura en el trazado de circunferencias, ya con el compás, ya con la cuerda, ya en el terreno, ya en el tablero o ya finalmente en tu cuaderno. Para el manejo del compás es conveniente utilices un cartón grueso de unos 25 × 40 cm para colocarlo debajo del papel, con objeto de que puedas clavar la punta del compás sin estropear la mesa.



Podemos definir:

Circunferencia es una curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

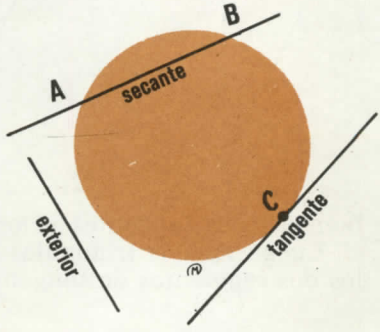
215. Posiciones de una recta respecto de una circunferencia. — En una cartulina dibuja una circunferencia. En un punto exterior a la misma sujeta una tira de cartón mediante un encuadernador. Mueve en seguida la tira de modo que ocupe diversas posiciones respecto de la circunferencia. Estudia estas posiciones.



1. Unas veces la tira no toca a la circunferencia en ningún punto; se dice que es **exterior** a la misma.

2. Otras veces toca a la circunferencia en dos puntos; se dice que es **secante** a la misma.

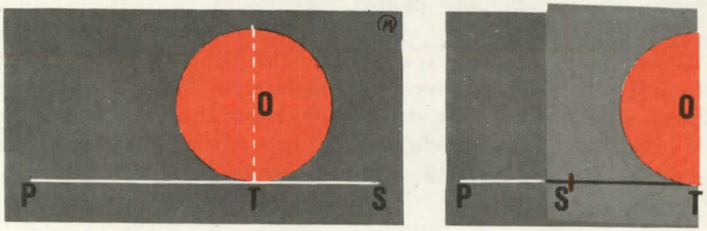
3. Finalmente, hay posiciones en que la tira toca a la circunferencia en un solo punto: se dice que la recta es **tangente** a la misma. En este caso el punto común a la circunferencia y a la recta se llama *punto de contacto*.



Dibuja una circunferencia y un punto exterior a la misma. ¿Cuántas tangentes podrías trazar, desde el punto a la circunferencia? Construyelas. ¿Y cuántas desde un punto de la misma circunferencia? ¿Y cuántas desde un punto interior a la circunferencia?

216. Propiedad de la tangente a una circunferencia. — Dibuja una circunferencia de centro O y un punto P exterior a la misma.

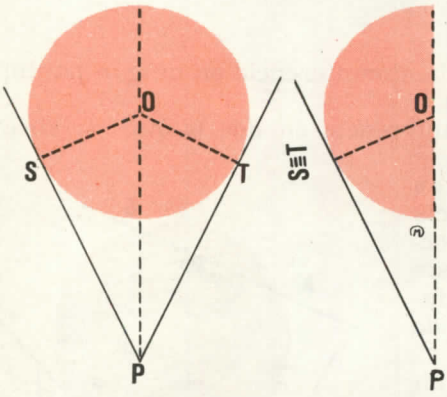
Desde P traza una tangente PS a la circunferencia, y sea T el punto de contacto. Construye el diámetro que pasa por T y dobla



por él la cuartilla. Observarás que, por ser el diámetro un eje de simetría de la circunferencia, una mitad de la misma coincidirá con la otra, pero al mismo tiempo la parte de tangente TS caerá sobre TP. Esto indica que los ángulos en T son rectos, o sea

Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

EJEMPLOS. 1. Toma un punto en una circunferencia y traza en él la tangente a la misma. Basta para ello que, mediante la escuadra, traces la perpendicular al radio en el punto de contacto.



2. Dibuja en papel transparente una circunferencia de centro O, y marca en el mismo un punto P exterior a la circunferencia. ¿Cuántas tangentes puedes trazar desde P a la circunferencia? Dibuja las dos y sean PS y PT, siendo S y T los puntos de contacto. Traza los radios OS y OT y también la recta OP, eje de simetría de la circunferencia.

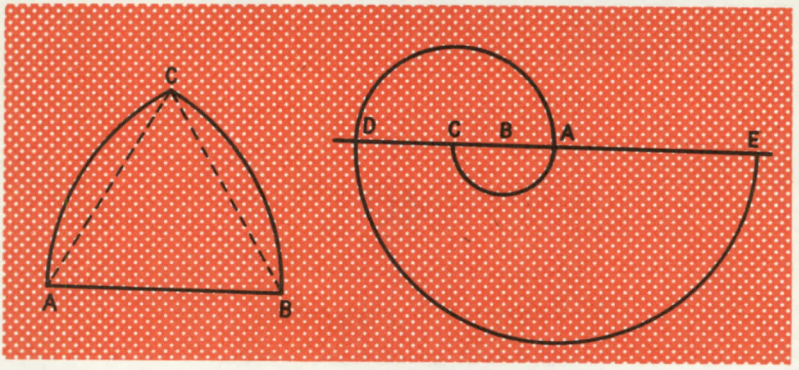
Dobla la cuartilla por ella. Observarás que los dos semicírculos coinciden, pero también las dos tangentes y los dos puntos de contacto.

Luego los dos triángulos OST y OPT son iguales; también lo son los dos segmentos de tangentes OT y OS, y los dos ángulos en P.

EJERCICIOS

1. Traza un segmento de longitud conveniente como AB. Haz centro en A y B, y con radio AB traza los arcos AC y BC.

Así obtienes el dibujo de un *arco equilátero gótico*, frecuentemente usado en arquitectura.



2. Traza una recta de longitud ilimitada. Con el compás toma:

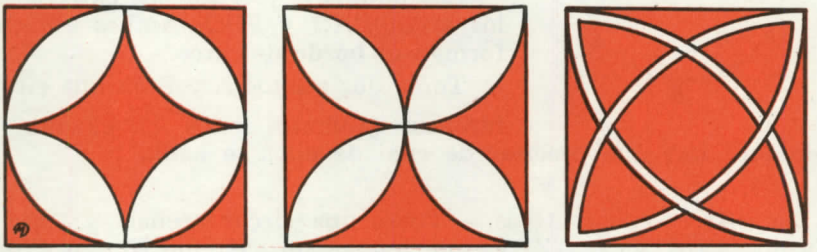
$$AB = BC; \quad CD = AC; \quad AE = AD$$

Sobre AC, AD y ED, como diámetros, traza semicircunferencias alternativamente a distinto lado de ED. Borra luego la recta ED. La curva así obtenida se llama *espiral*.

3. Dibuja un cuadrado. Traza una circunferencia que pase por sus 4 vértices.

4. Dibuja un triángulo equilátero. Traza una circunferencia que pase por sus 3 vértices.

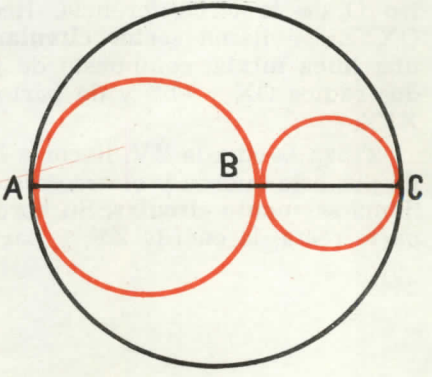
5. Haz un dibujo parecido al que muestran las figuras siguientes:



6. Una vaca que pace en una pradera rectangular está atada a una esquina de ésta con un cordel de 9 m de largo. La pradera tiene por dimensiones 12'5 m por 15'5 m. Construye una figura a escala que muestre toda la superficie sobre la cual puede pacer la vaca.

7. Traza un segmento AB de 4 cm de longitud. Halla las circunferencias que pasan por A y B y que tengan 3'5 centímetros de radio.

8. Sean 3 puntos A, B, C en línea recta. Traza las circunferencias de diámetros AB, BC y AC.

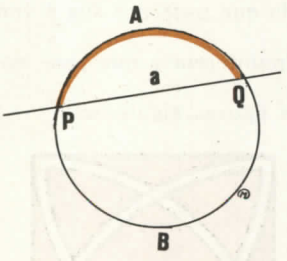


9. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio se ha de trazar una recta para que sea: 1.º, secante; 2.º, tangente; 3.º, exterior?

40

Arcos y cuerdas

217. Arco de circunferencia. — Traza una circunferencia y una recta *a* secante a la misma. Dicha secante divide al plano en dos semiplanos a A y a B. Una parte de la circunferencia queda en el primero, y otra en el segundo. Cada una de estas partes se llama **arco.**

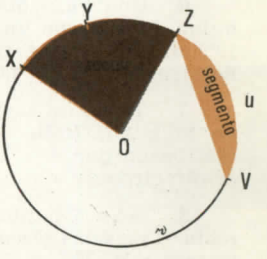


Representaremos el primero por $\overset{\frown}{PAQ}$, que se lee «arco PAQ», y al segundo por $\overset{\frown}{PBQ}$, que se lee «arco PBQ».

Los puntos P y Q son los **extremos** de los arcos PAQ y PBQ. Ambos extremos forman el **borde** del arco.

Toma dos puntos A y B en una circunferencia. ¿Cuántos arcos $\overset{\frown}{AB}$ existen? En todo caso hay que precisar de cuál de ellos se habla.

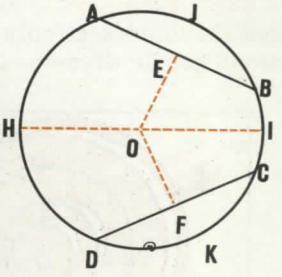
218. Arcos consecutivos. — Traza una circunferencia y toma en ella dos arcos XYZ y ZUV, que tengan un extremo común y nada más en común. Estos arcos se llaman **consecutivos.**



Une el punto X y el punto Y con el centro O de la circunferencia. Recorta la figura OXYZ: se llama **sector circular.** Su borde es una **línea mixta,** compuesta de parte recta, los dos radios OX y OZ, y de parte curva, el arco XYZ.

Traza la cuerda ZV. Recorta la figura formada por esta cuerda y el arco respectivo ZUV: se llama **segmento circular.** Su borde es una línea mixta, compuesta de parte recta, la cuerda ZV, y parte curva, el arco ZUV.

219. Arcos y cuerdas iguales. — Traza una circunferencia de centro O. Con el compás toma cuerdas iguales AB = CD. Dobla por un diámetro HI tal que B caiga sobre C. Observarás que una semicircunferencia coincidirá con la otra, y que al mismo tiempo A caerá en D. O sea, los arcos AB y CD han coincidido.



A cuerdas iguales corresponden arcos iguales.

EJEMPLOS. 1. Traza desde O las perpendiculares a las cuerdas, y considera los segmentos de perpendicular OE y OF. ¿Qué sucede en el doblado?

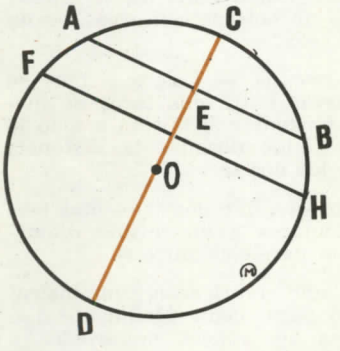
Los dos segmentos coinciden. No puede ser de otro modo, pues al confundirse las cuerdas, han de coincidir las perpendiculares. La perpendicular a una recta desde un punto exterior es única. Luego

Las distancias desde el centro de las circunferencias a cuerdas iguales son iguales.

2. En un cartón traza una circunferencia y recórtala. Aplicando una cinta a su borde, lleva dos arcos iguales, $\overset{\frown}{AJB} = \overset{\frown}{DKC}$. Dobla por un diámetro tal que B caiga sobre C. Observarás que coincidirán los arcos, y por tanto también las cuerdas: $\overline{AB} = \overline{DC}$.

A arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

220. Diámetro perpendicular a una cuerda. — Traza una circunferencia en papel transparente y una cuerda AB cualquiera. Con la escuadra dibuja un diámetro perpendicular a dicha cuerda, o sea traza desde O la perpendicular a AB.



Dobla por dicho diámetro: la semicircunferencia CAD coincide con la CBD; al mismo tiempo, por ser los ángulos en E rectos, EA cae sobre EB. Luego A coincide con B. Por tanto, **un diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.**

EJEMPLOS. 1. ¿Cómo divide el diámetro CD a los dos arcos $\overset{\frown}{ACB}$ y $\overset{\frown}{ADB}$?

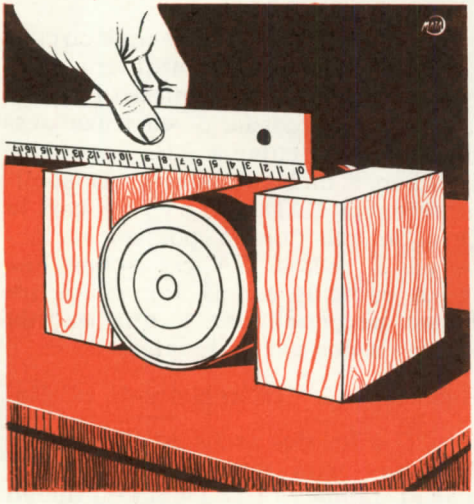
2. Traza otra cuerda FH perpendicular al diámetro CD. Dobla de nuevo

por dicho diámetro y comprueba que $\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{AF}$, o sea que

Arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son iguales.

221. Ejemplos. — Son numerosos en la vida práctica los ejemplos de figuras circulares: las ruedas de la bicicleta con sus radios, las ruedas de diversos vehículos, aros, llantas, etc. Los raíles del ferro-

carril son *tangentes* a las ruedas del tren. Un lápiz colocado sobre un vaso es *secante* al borde circular del mismo.



EJERCICIOS

1. ¿Cómo hallarías el diámetro de un bote de conservas, de un árbol, etc.?

Sugerencia. — Coloca el bote de conservas entre dos tacos de madera tangentes al mismo a todo lo largo. Mide después la distancia entre los dos tacos.

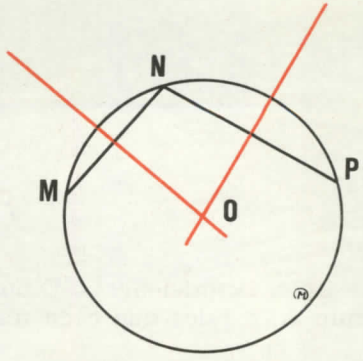
Observa que dos tangentes perpendiculares a un mismo diámetro son paralelas entre sí.

¿Cómo fabricarías un instrumento para medir fácilmente diámetros de troncos de árboles a diferentes alturas? ¿En qué se funda el calibrador?

2. Toma tres puntos en un plano. Sean M, N y P. ¿Sabrías trazar una circunferencia por esos tres puntos?

Sugerencia. — Traza la mediatriz del segmento MN y la del NP. El punto O de intersección de ambas equidista de M y de N, por ser de la primera mediatriz, y de N y P por serlo de la segunda mediatriz. Luego equidista de M, N y P, y es el centro de una circunferencia que pasa por los tres puntos.

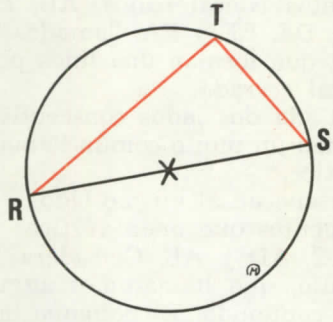
Por tres puntos dados pasa una, y sólo una circunferencia.



3. Traza una circunferencia de centro O y un diámetro RS. Toma otro punto cualquiera T, y únelo a los extremos R y S del diámetro.

Comprueba que las cuerdas TS y RT son perpendiculares.

Aquí tienes un procedimiento para trazar cuerdas perpendiculares con un extremo común.



4. Traza tres arcos consecutivos cada uno con el siguiente.

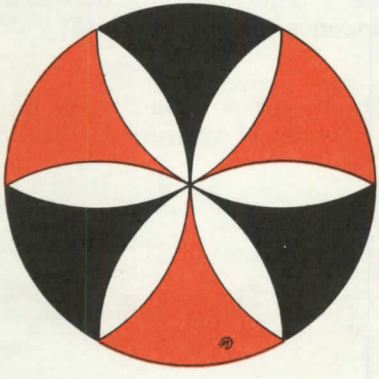
5. ¿Cómo harías para dividir un arco en dos partes iguales?

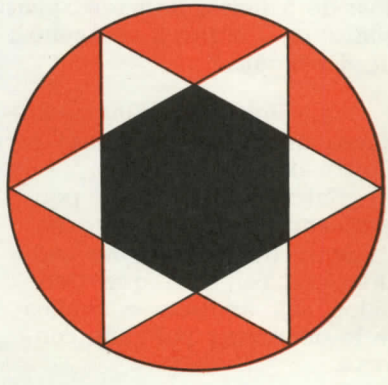
Sugerencia. — Basta que traces la bisectriz del ángulo central correspondiente. ¿Qué teorema aplicas?

6. Divide un arco en 4 partes iguales.

7. Construye 5 circunferencias iguales que pasen por el mismo punto P. Los centros O, O^{I}, O^{II}, O^{III} y O^{IV} de dichas circunferencias, ¿sobre qué línea están situadas? ¿Cuáles son el centro y el radio de esta última circunferencia?

8. Traza con el compás una circunferencia y lleva el radio como cuerda sobre la misma 6 veces consecutivas. Verás que cabe exactamente seis veces. Después haz los siguientes dibujos:

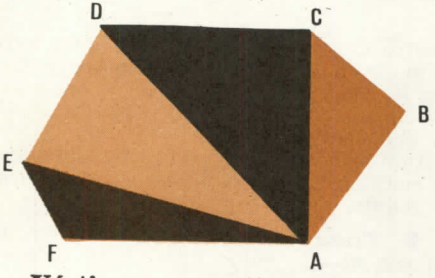




41

Polígonos

222. Definiciones. — Dibuja varios triángulos con un vértice común A, y tales que cada uno sea consecutivo con el siguiente. Obtienes así una figura ABCDEF, llamada **polígono;** su borde se compone de una serie de segmentos concatenados, AB, BC, CD, DE, EF y FA, llamados **lados,** que forman una línea poligonal cerrada.



Cada dos lados consecutivos tienen un punto común llamado **vértice.**

Vértices consecutivos son los que pertenecen al mismo lado.

Diagonales del polígono son los segmentos que unen vértices no consecutivos. Tales son, por ejemplo, AC, AD y AE. Considera las semirrectas AB y AF: forman un ángulo, que llamaremos **ángulo** del polígono, dentro del cual está éste contenido. El polígono está contenido en todos sus ángulos.

El polígono en realidad **es la intersección de todas las regiones angulares correspondientes a todos los ángulos del polígono.**

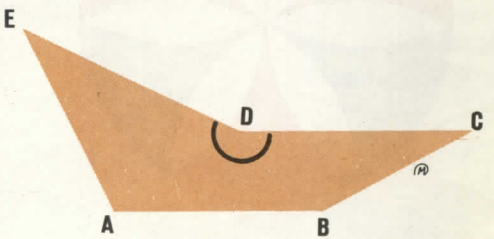
EJEMPLOS. 1. En un polígono compara el número de lados y de ángulos. Hay igual número de lados que de ángulos.

2. Dibuja, colorea y recorta polígonos de distinto número de lados: de 5 lados, llamados **pentágonos;** de 6 lados, denominados **exágonos;** de 7 lados, o **eptágonos;** de 8, **octógonos;** de 9, **eneágonos;** y de 10, **decágonos.**

223. Polígonos cóncavos. — Para dibujar un polígono basta que traces una línea poligonal cerrada, y colorees el recinto encerrado dentro de la misma.

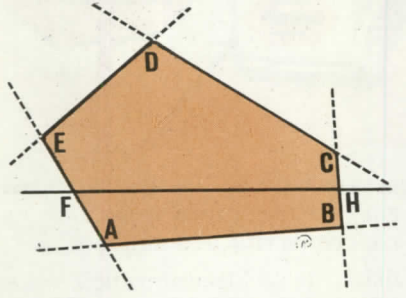
¿Sabrías dibujar un polígono con un ángulo cóncavo?

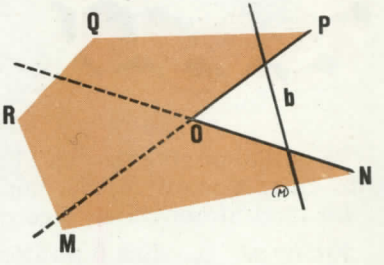
Se le llama **polígono cóncavo,** así como al que tiene todos sus ángulos convexos se le denomina **polígono convexo.**



Intenta ajustar el lado DC del ángulo cóncavo, o el DE, sobre el borde de tu mesa de modo que todo el polígono quede dentro de la mesa. Observarás que no lo puedes conseguir de ninguna manera, sino que siempre sobresale un pico. Esto no sucede si se realiza la misma operación con cualquier otro lado.

224. Diferencias entre los polígonos convexos y cóncavos. —Dibuja un polígono convexo y otro cóncavo.





Pon letras en sus vértices y nómbralos.

1. Prolonga los lados del primero. ¿Alguna de las prolongaciones corta al borde del polígono?

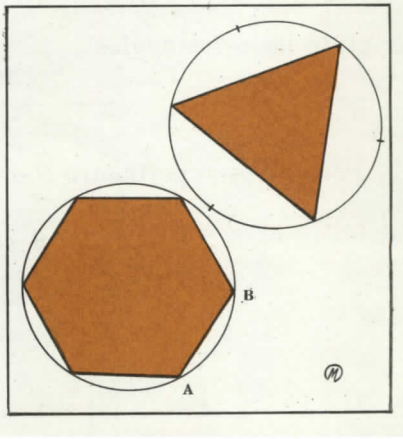
¿Sucede lo mismo con las prolongaciones de ON y OP en el polígono cóncavo?

2. En el polígono convexo, una recta cualquiera, como la FH, ¿en cuántos puntos, como máximo, puede cortar al borde del polígono?

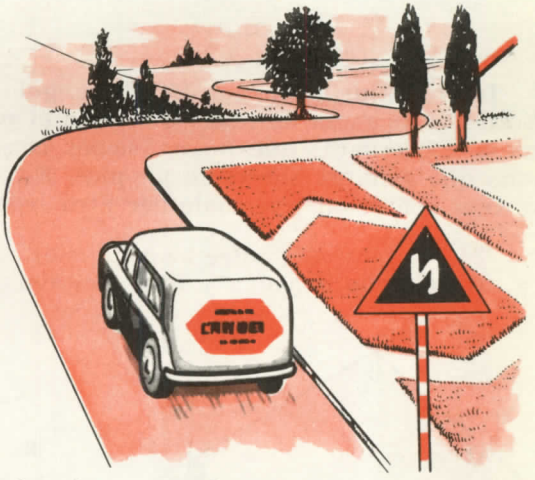
¿Sucede lo mismo con el polígono cóncavo? Fíjate en la recta *b*.

3. ¿Puedes ajustar cualquier lado del polígono convexo, de modo que todo el polígono quede dentro de la mesa? ¿Sucede lo mismo con el polígono cóncavo?

225. Polígonos regulares. —Traza una circunferencia y lleva el radio como cuerda sobre la misma cuantas veces puedas. Verás que cabe exactamente 6 veces. Uniendo los puntos de división obtienes un polígono de 6 lados, o exágono. Pero con la particularidad de que todos sus lados son iguales. También son iguales sus 6 ángulos, como puedes comprobar doblando por un diámetro que pase por dos vértices del exágono.



Un polígono que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales se llama polígono regular.



El polígono obtenido es el **exágono regular.** Se dice que está **inscrito** en la circunferencia, por tener sus vértices en la misma.

La circunferencia se dice que está **circunscrita** al exágono.

EJEMPLOS. 1. Los 6 puntos de división de la circunferencia anterior únelos de dos en dos. Obtienes un **triángulo regular** o **equilátero.**

2. En el exágono anteriormente construido, ¿por cuántos diámetros podemos doblar, de modo que los ángulos coincidan? Especifica qué ángulos se superponen en cada caso, y por qué los 6 ángulos son iguales.

226. Aplicaciones de los polígonos regulares. —Los polígonos regulares son bastante frecuentes en la vida diaria. En la figura se dan unos cuantos ejemplos.

227. Área del polígono regular. —Todo polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos iguales que tienen por base el lado l del polígono y cuya altura se denomina *apotema* del polígono. El área de cada triángulo valdrá:

$$\frac{1 \cdot a}{2}$$

y el de los n triángulos

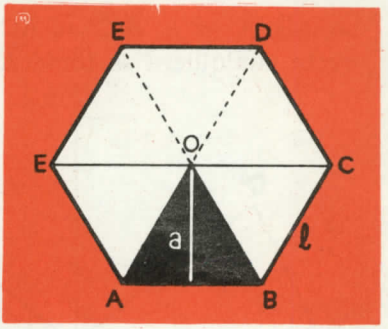
$$\frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

Pero $n\,l$ es el perímetro P del polígono. Luego:

$$S = \frac{P \cdot a}{2}$$

El área del polígono regular es igual a la mitad del producto de las medidas del perímetro y de la apotema.

Halla el área de un exágono regular que tiene 6 cm de lado y 5'2 cm de apotema.



Solución: El perímetro del exágono vale

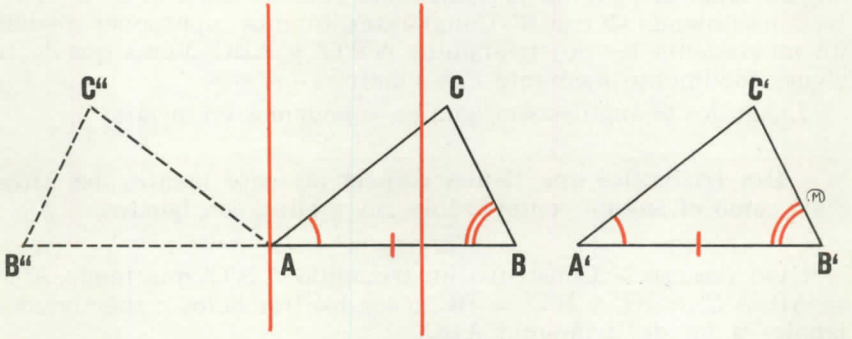
$$P = 6 \text{ cm} \cdot 6 = 36 \text{ cm}$$

y el área,

$$S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{36 \text{ cm} \cdot 5'2 \text{ cm}}{2} =$$

$$= \mathbf{93'6 \text{ cm}^2}.$$

228. Construcción de triángulos. — Caso primero. Dibuja un triángulo cualquiera ABC. Construye ahora otro triángulo A'B'C'

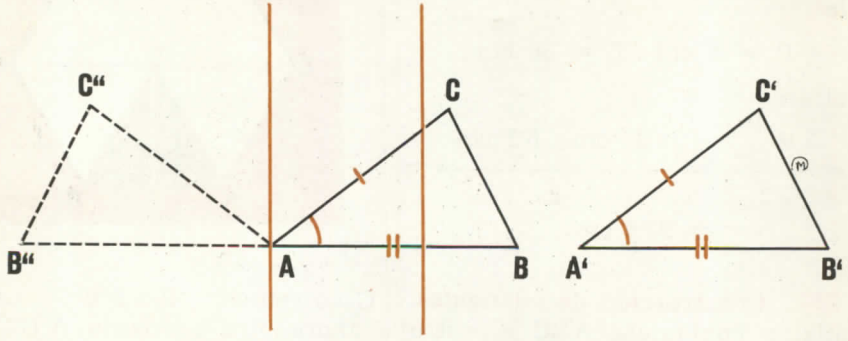


tal que $A'B' = AB$, $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$. Fácilmente puedes realizar esta construcción.

Intenta ahora superponer los dos triángulos mediante un movimiento, o sea, mediante un número cualquiera de simetrías. Para ello dobla primero de manera que A' caiga sobre A. Resulta el triángulo AB''C''. Dobla entonces por la mediatriz de BB'. Verás que los dos triángulos se superponen. Por tanto, son iguales. Deducimos que:

Dos triángulos que tienen un lado del uno igual a un lado del otro, e iguales respectivamente los ángulos contiguos a dicho lado, son iguales.

CASO SEGUNDO. — Construye un triángulo A′B′C′ que tenga $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\overline{A'C'} = \overline{AC}$. La construcción es bien sencilla: en una recta cualquiera se toma $\overline{A'B'} = \overline{AB}$; en el extremo A′ se traza un

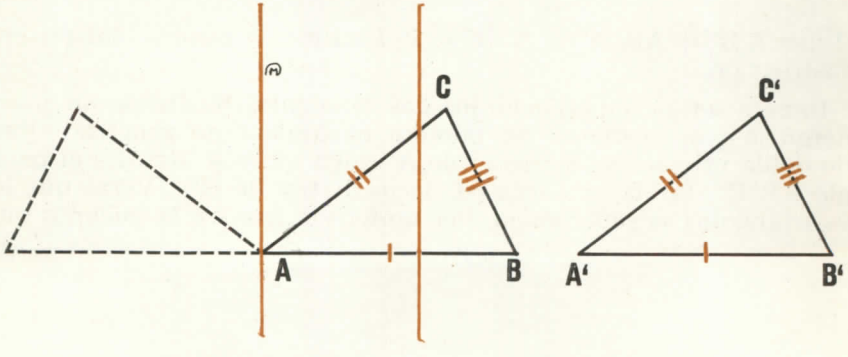


ángulo igual al A, y en la semirrecta A′C′ se toma $\overline{A'C'} = \overline{AC}$. Se termina uniendo C′ con B′. Como antes, intenta superponer mediante un movimiento los dos triángulos A′B′C′ y ABC. Verás que lo consigues fácilmente mediante dos simetrías.

Luego los triángulos son iguales, y podemos enunciar:

Dos triángulos que tienen respectivamente iguales dos lados, así como el ángulo comprendido entre ellos, son iguales.

CASO TERCERO. — Construye un triángulo A′B′C′ que tenga $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ y $B'C' = BC$, o sea los tres lados respectivamente iguales a los del triángulo ABC.

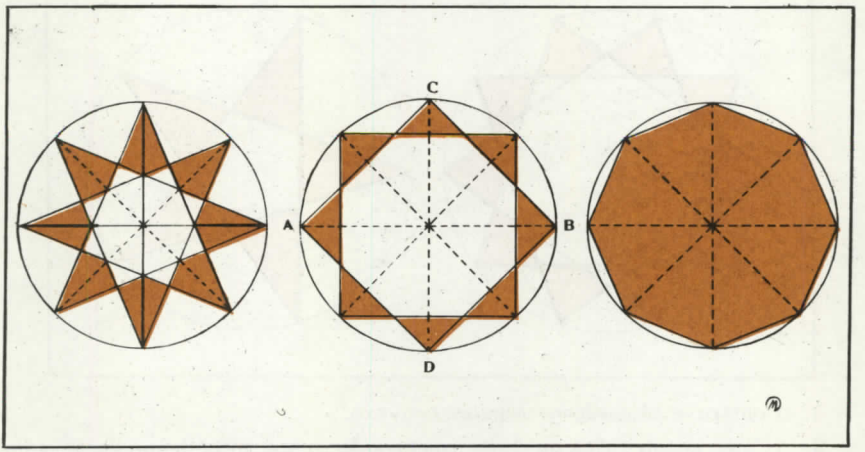


Para ello en una recta cualquiera se toma A′B′ = AB. En seguida se hace centro en B′ y con un radio igual a BC se traza un arco. Se hace centro en A′, y con un radio igual a AC se traza otro arco. La intersección de los dos arcos determina el vértice C′.

Por las mismas simetrías que antes, observarás que los dos triángulos son iguales. Luego podemos enunciar:

Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente iguales son iguales.

EJERCICIOS

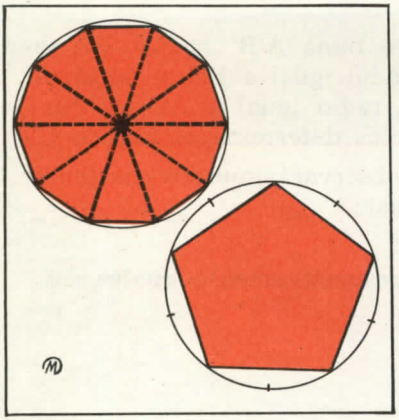


1. En una circunferencia traza un diámetro cualquiera AB. Por medio de la escuadra, trázale el diámetro perpendicular CD. Dibuja a continuación las bisectrices de los cuatro ángulos formados. Así la circunferencia queda dividida en 8 partes iguales. Haz en seguida los dibujos representados en la figura.

El primero se obtiene uniendo los puntos de división de tres en tres. El polígono se llama *octógono regular estrellado*, o estrella de ocho puntas.

El segundo se compone de dos *cuadriláteros regulares* o *cuadrados*. Se unen los puntos de división de dos en dos.

El tercero es el *octógono regular convexo*. Se obtiene uniendo los puntos de división de uno en uno.

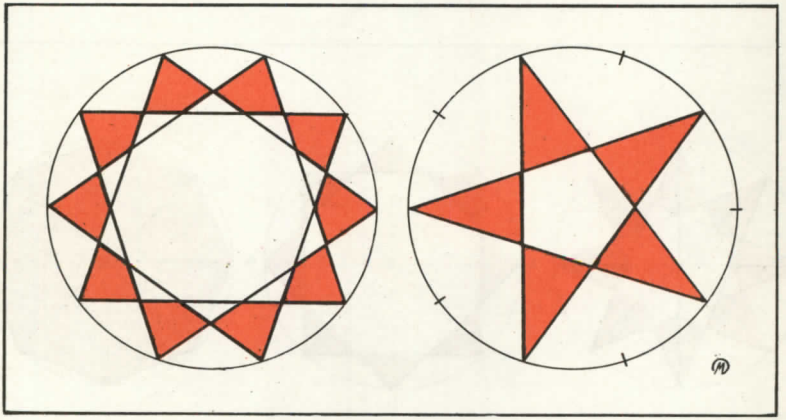


2. Construye el *decágono regular inscrito* en la circunferencia. Emplea el transportador para trazar los ángulos de 36°. Uniendo las divisiones de dos en dos, construye el *pentágono regular inscrito.*

3. Prosiguiendo las construcciones del problema anterior, haz los dibujos indicados en la figura adjunta:

El primero resulta de unir los puntos de división de tres en tres. El polígono obtenido se llama *decágono regular estrellado*, o estrella de 10 puntas.

El segundo se obtiene uniendo dichos puntos de cuatro en cuatro. El polígono es el *pentágono regular estrellado* o estrella de 5 puntas.



4. Construye el *eneágono* regular convexo.

5. ¿Cómo construirías un *dodecágono regular*, o sea un polígono de 12 lados? ¿Qué ángulo tomarías en el centro de la circunferencia, por medio del transportador de ángulos, para que quedase dividida ésta en 12 partes iguales?

6. Si unes de dos en dos los 12 puntos de división del problema anterior, ¿qué polígono obtienes? ¿Y si los unes de tres en tres? ¿Y si de cuatro en cuatro?

7. Une de 5 en 5 los 12 puntos de división del problema 5. Obtienes el *dodecágono regular estrellado*, o estrella de 12 puntas.

8. El lado de un exágono regular mide 5 cm. ¿Cuál es su perímetro?

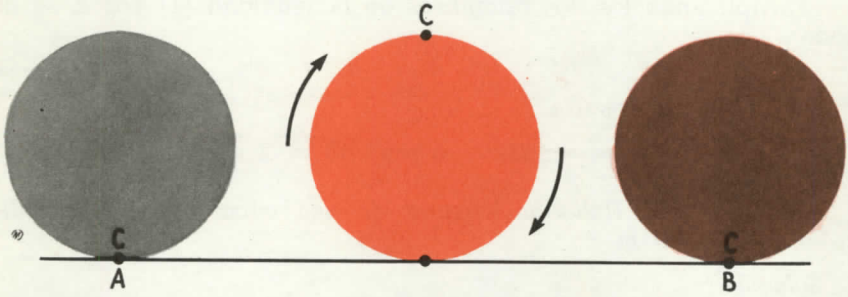
9. Un decágono regular convexo tiene su lado de 12 cm. ¿Cuál es su perímetro?

10. El perímetro de un pentágono regular convexo es 35 cm. ¿Cuánto mide su lado?

42

Longitud de la circunferencia y área del círculo

229. Qué es longitud de la circunferencia. — Recorta en una cartulina un círculo, y señala un punto C sobre su borde o circunferencia. Traza una recta sobre la mesa (en un papel que extenderás sobre la misma). Haz girar, sin deslizar, el círculo sobre dicha recta, de modo que al empezar, el punto C de la circunferencia coincida con un punto de la recta, sea el punto A. Llamemos B al punto de la recta que coincide con el punto C, cuando éste vuelve a estar en contacto con la recta después de una vuelta completa.



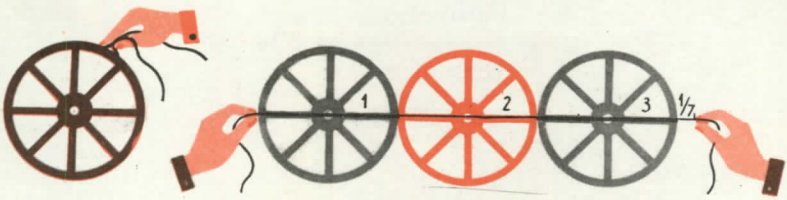
El segmento AB se llama *circunferencia rectificada.*

Se llama longitud de una circunferencia a la de su circunferencia rectificada.

Lo mismo se puede lograr arrollando un hilo alrededor del círculo y luego extendiéndolo sobre la mesa.

230. Fórmula de la longitud de la circunferencia. — Arrollemos un hilo o una cinta métrica sobre el borde exterior de una rueda, de un aro, de una moneda, de un bote de conservas, etc.

Extendiendo luego sobre la mesa el trozo arrollado, y llevando sobre él el diámetro de la circunferencia, veremos que siempre cabe *tres veces*, sobrando un pequeño trozo que es, aproximadamente, 1/7 del diámetro.



El cociente de la longitud de la circunferencia por su diámetro es siempre el mismo: es un número constante al que universalmente se designa con la letra griega π.

Se tiene

$$\frac{C}{d} = \pi \qquad [1]$$

siendo C la longitud de la circunferencia y d la de su diámetro.

El número π vale aproximadamente

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3'14$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad [1] por d, se obtiene

$$C = \pi \cdot d \qquad [2]$$

Y como $d = 2R$, resulta

$$C = \pi \cdot 2R \quad \text{o sea} \quad C = 2\,\pi\,R \qquad [3]$$

EJEMPLOS. 1.º *Halla la longitud de una circunferencia de radio: a) 5'8 dm; b) 0'27 m.*

Solución:

a) $C = 2 \cdot 3'14 \cdot 5'8$ dm $= 36'424$ *dm*

b) $C = 2 \cdot 3'14 \cdot 0'27$ m $= 1'6956$ *m*

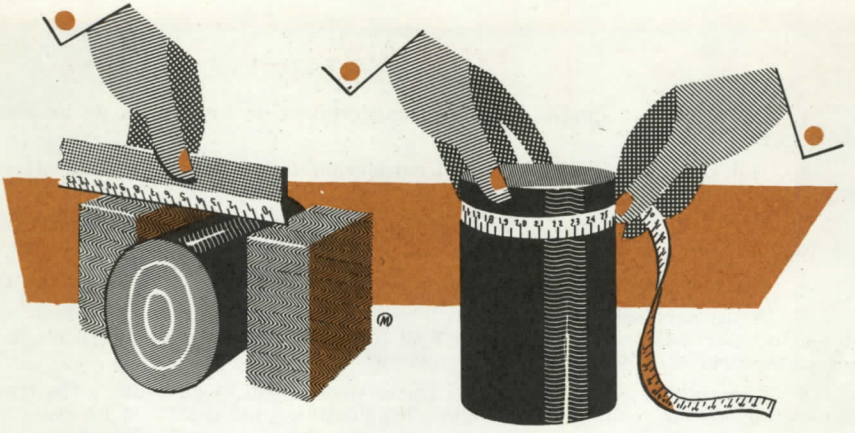
2.º *Halla el radio de una circunferencia de 14'65 dm de longitud.*

Solución: De la fórmula [3] se deduce:

$$R = \frac{C}{2\,\pi} = \frac{14'65 \text{ dm}}{6'28} = 2'33 \text{ dm.}$$

3.º Midamos el diámetro de un bote de conservas con una regla graduada. A continuación, rodeándole con una cinta métrica, hallemos la longitud o perímetro de su circunferencia básica. En seguida dividamos la segunda medida por la primera. Hallaremos que:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}} = 3'14$$

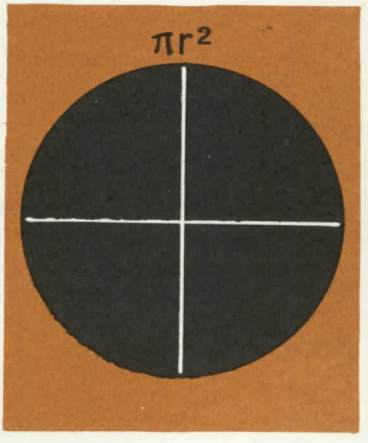


Haciendo la misma operación con un aro, con un anillo, una moneda, etc., hallamos siempre que el *perímetro es 3'14 veces mayor que el diámetro*, y más exactamente 3'1416 veces mayor.

231. Área del círculo. — Cuando el número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia aumenta indefinidamente, el perímetro tiende a confundirse con la circunferencia, la apotema con el radio de la misma y su área con el área del círculo. Luego de la fórmula [2] del número anterior y del número 227, deducimos:

$$\text{área del círculo} = \frac{2\,\pi\,\mathbf{R}\,.\,\mathbf{R}}{2} = \pi\,\mathbf{R}^2 \qquad [4]$$

El área de un círculo se obtiene multiplicando por π el cuadrado del número que mide su radio.



EJEMPLO.—*Hallar el área de un círculo cuyo diámetro mide 8 m.*

El radio valdrá 4 m. Luego

$$S = 3'14\,.\,4^2 m^2 = 3'14\,.\,16\ m^2 = 50'24\ m^2$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál será la longitud de la circunferencia de una rueda de un carro de 0'75 m de radio?

2. Halla las longitudes de las circunferencias que tienen de radio 31 cm, 2'3 dm, 5'25 m.

3. Halla el diámetro de una circunferencia que mide 317'14 dm. ídem de 101'422 mm. (Utiliza $\pi = 3'14$.)

4. Halla el radio de una circunferencia de 2 metros. ídem de 125'64 cm.

5. A un carpintero le encargan una mesa redonda para 12 personas, que deben ocupar cada una un arco de 0'60 m. ¿Cuál debe ser la longitud de la circunferencia y cuál el radio de la misma?

6. Las ruedas delanteras de un coche tienen 0'40 m de radio y las traseras 0'45 m. Si las primeras han dado 1000 vueltas, ¿qué distancia ha recorrido el automóvil? ¿Cuántas vueltas han dado entretanto las ruedas traseras?

7. Un niño tiene un aro de 0'80 m de diámetro. ¿Qué camino recorre dando 50 vueltas? ¿Cuántas vueltas dará para recorrer 1 km?

8. Una correa sinfín pasa por dos poleas iguales de 0'30 m de radio. Los centros de las poleas distan entre sí 4'30 m. Calcular la longitud de la correa.

9. Las ruedas de una bicicleta tienen 0'85 m de diámetro. ¿Cuántos centímetros mide su radio? ¿Qué longitud recorre la bicicleta al dar una vuelta las ruedas?

10. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio se ha de trazar una recta para que sea: 1.º, secante; 2.º, tangente; 3.º, exterior?

11. ¿Cuál es el área de un círculo cuya circunferencia mide 25'12 m? (Toma $\pi = 3'14$.)

12. El diámetro de una moneda mide 26 mm. ¿Cuál es el área de una de sus caras?

13. Un círculo de radio 27 cm es equivalente (igual área) a un trapecio cuyas bases son 91'20 cm y 70'80 cm. ¿Cuál es su altura? (Toma $\pi = 3'14$.)

14. ¿Cuál es el área de un círculo cuyo perímetro es 28'26 m?

15. Una mesa está formada por un rectángulo de 1'70 m de largo por 0'90 m de ancho y de dos semicírculos que le prolongan en el sentido de la longitud, teniendo por diámetro la anchura de la mesa. ¿Cuál es: 1.º, el área de la mesa; 2.º, su perímetro?

16. La longitud de una circunferencia es de 50 m. ¿Cuál es el área de su círculo?

17. Una correa sinfín corre sobre dos poleas iguales de 12'5 cm de diámetro, cuyos centros distan entre sí 15 cm. ¿Cuál es la longitud de la correa?

18. Dos poleas de radios iguales a 24 cm tienen sus centros a 108 cm de distancia. Halla la longitud de la correa que las une, sin cruzarse.

19. ¿Cuántas vueltas da una rueda de 76 cm de diámetro al correr 2387'6 metros?

Aprobado por el M. de E. y C.
Orden del 25-III-69
Boletín Oficial del 1-IV-69
1969 95 pts.

Distribuyen:

EDICIONES S. M. ● Gral. Tabanera, 39 - MADRID 19
BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. ● Nieremberg, 14 - MADRID
EDITORIAL BRUÑO ● Bocángel, 15 - MADRID
EDITORIAL L. VIVES ● Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA